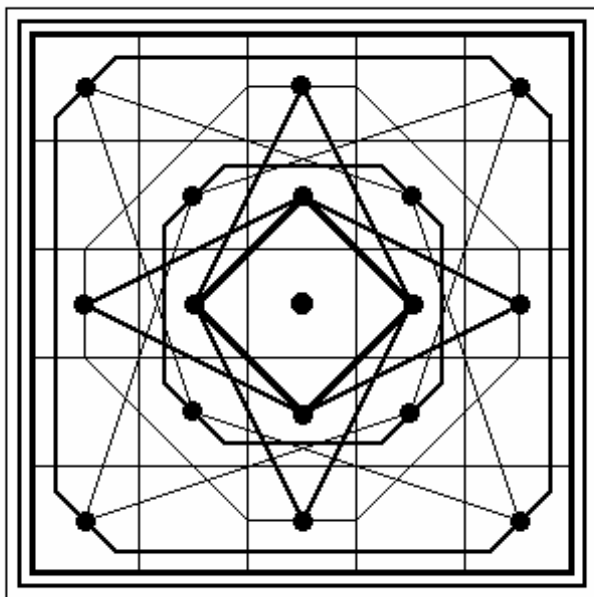


Лекции по Математике. Вып. ТММ-1

Ю. В. Чебраков

ТЕОРИЯ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ



Санкт-Петербург, 2010

УДК 511+512

ББК 22

Ч345

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор С.-Петербург. техн. ун-та

М. А. Салль

Кандидат физико-математических наук,
доцент ин-та истории естествознания и техники РАН

Л. И. Брылевская

Чебраков Ю. В.

Ч345 Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во «BBM», 2010. – 280 с. – (Лекции по Математике. Вып. ТММ-1.)

ISBN 978–5–9651–0357–7

Данная книга является *первым выпуском* курса лекций, посвященных изложению современного варианта *теории магических матриц* (ТММ). В ней излагаются развитый автором функционально-алгебраический подход к решению различных комбинаторных задач о классических и нетрадиционных магических матрицах (в частности, о классических и нетрадиционных магических квадратах) и основные понятия и методы теории чисел, комбинаторного анализа, теории линейных уравнений и теории матриц, которые наиболее активно используются в ТММ.

Текст лекций написан простым понятным языком, содержит не только теоретический материал, но и описание разнообразных вычислительных алгоритмов и математических методов решения задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: от студентов вузов и университетов до преподавателей и научных сотрудников.

УДК 511+512

ББК 22

© Ю. В. Чебраков, 2010

ISBN 978–5–9651–0357–7

Предисловие

В математике под *магическим квадратом порядка n* обычно понимают *квадратную матрицу* (таблицу) размером $n \times n$, так заполненную различными числами или символами, что их сумма в строках, столбцах и главных диагоналях матрицы одинакова. Значение этой суммы принято называть *магической постоянной* квадрата и обозначать символом S .

Магические квадраты различают по следующим признакам:

- а) размеру (значению их порядка n);
- б) величине магической постоянной S ;
- в) характеру элементов, из которых они построены. Например, магические квадраты $n \times n$ называются
 - *числовыми* или *символьными* в зависимости от того, содержат ли они только числа или в них присутствуют также символы;
 - *классическими* или *нетрадиционными* в зависимости от того, содержат ли они только последовательные натуральные числа от 1 до $n \times n$ или содержат какой-либо другой набор чисел;
 - *структурированными* или *неструктурированными* в зависимости от того, можно или нельзя все их элементы распределить по парам таким образом, чтобы в каждой паре сумма элементов была одинакова (значение этой суммы при четном n равно $2S/n$), и т.д.;
- г) наличие определенных k наборов по n клеток квадрата, сумма элементов в которых также равна магической постоянной S . Например, магический квадрат $n \times n$ называется *совершенным*, если в указанный k набор по n клеток входят все его *разломанные диагонали*, т.е. все такие пары диагональных рядов квадрата, которые, во-первых, параллельны друг другу, и, во-вторых, в совокупности содержат n клеток (если образовать прямоугольник из приставленных друг к другу двух одинаковых магических квадратов, то в таком прямоугольнике любая разломанная диагональ

квадрата совпадет с одним из диагональных рядов, содержащих n клеток);

д) способности оставаться магическими квадратами после возведения в некоторую степень всех содержащихся в них элементов (магический квадрат называют *двойным*, *тройным* и т.д., если он остается магическим после возведения всех его элементов соответственно во вторую, третью и т.д. степени);

е) свойству иметь одинаковое значение произведений, составленных из элементов его строк, столбцов и главных диагоналей (магические квадраты, имеющие такое свойство, называются *аддитивно-мультипликативными* квадратами).

Как хорошо известно, магические квадраты являются одним из древнейших математических объектов исследования. В течение более чем 4000 лет изучением их свойств и способов построения занималось большое число магов, астрологов, профессионалов-математиков и любителей:

- «Появление магических квадратов тесно связано с суевериями и предрассудками. Эта связь и объясняет происхождение названия “магический”...

В докоперниковой системе насчитывалось семь планет, именно: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер, Сатурн. Между этими семью планетами с одной стороны, магическими квадратами с другой, астрологи установили тесную связь: к Сатурну, наиболее отдаленной планете, они отнесли магический квадрат с наивозможно меньшим числом клеток, именно, с девятью; этот квадрат часто называли “*Tabula Saturni*” — таблица Сатурна. Соответственно этому Юпитеру, планете ближайшей к Сатурну, соответствует магический квадрат с 16-ю клетками, как ближайший к квадрату с 9-ю клетками, и т.д.

Эти магические квадраты наносились на амулеты, так, что каждому из них приписывались свойства бога, имя которого носила планета, соответствующая нанесенному на этот амулет квадрату. По квадрату, находящемуся на амулете, последнему давали и название» (*Аренс В.* Математические игры. М., Л., 1924);

- «Наряду с астрологическими в Средние века были чрезвычайно распространены и числовые суеверия. Так, большим

значением пользовались магические квадраты, которым придавалось мистическое значение. Квадрат из одной клетки означает единство и вечность божества. Невозможность построения магического квадрата из 4-х клеток свидетельствует о несовершенстве четырех стихий, то есть земли, воздуха, воды и огня; это также символ первородного греха...

Серебряные пластинки с начертанными магическими квадратами употребляли как талисманы, особенно против чумы, которая тогда опустошала Европу...

Упоминается также, что квадрат из 9-и клеток способен улучшить расположение звезд при появлении на свет новорожденного» (*Чистяков И.И.* Числовые суеверия. М., Л., 1927);

- «Нет сомнения, что магический квадрат получил свое название не потому, что сумма чисел вертикальных и горизонтальных рядов является константой, а потому, что древние математики знали наличие в квадратах бесчисленных скрытых магических рядов, из которых рождались оракулы и разные фигуры — тайные и общеизвестные, которые распространялись по Индии и за ее пределами как священные и магические знаки» (*Рудин Н.М.* От магического квадрата к шахматам. М., 1969);
- «Истинная Магия называется высочайшая степень естественной и твари возможной мудрости и высочайшее видение естества. Кто сие высочайшее видение обращает ко благу человечества, тот есть истинный Маг. Сия наука известна была Персам и Халдеям, Евреям и Грекам. В Индии и Эфиопии читатели ее были Брамины и Гимнософисты, у Галлов — Друиды. В Персии учились ей Цари. В Платоновом Акивиаде говорится:
“Четверо занимаются изложением законов Персии: один из премудрейших, один из правосуднейших, один из воздержаннейших и один из храбрейших мужей, из которых первый обучает Царя Магии и учит закону и порядку. Поэтому восточные Цари и назывались Магами”...

Во всех мистериях Древних, во всех Иероглифах древности содержится великая тайна науки чисел» (*Эккартсгаузен Г.* Ключ к таинствам натуры. СПб., 1804);

- «Над пианино кнопками была прикреплена арифметическая гравюра, купленная им в лавке какого-то старьевщика: так называемый магический квадрат, вроде того, что наряду с песочными часами, циркулем, весами, многогранником и другими символами изображен на Дюреровой “Меланхолии”».

Как и там он был поделен на шестнадцать полей, пронумерованных арабскими цифрами, так что “1” приходилось на правое нижнее поле, а “16” — на левое верхнее; волшебство — или курьез — состояло здесь в том, что эти цифры, как бы их ни складывали, сверху вниз, поперек или по диагонали, в сумме неизменно давали 34.

На каком порядковом принципе зиждился этот магически одинаковый результат, я так никогда и не понял, но благодаря почетному месту над инструментом, которое Адриан отвел этому листку, он постоянно привлекал мой взгляд, и, бывая у Адриана, я всякий раз спешил взглянуть на него поперек, наискось или вниз по прямой, чтобы лишний раз убедиться в фатальной неизменности суммы слагаемых» (*Манн Т.* Доктор Фаустус. М., 1959);

- «Составление магических квадратов, представляет собой превосходную умственную гимнастику, развивающую способность понимать идеи размещения, сочетания, симметрии, классификации, обобщения и т.д.» (*Обри А.* Вступительная статья / *Cazalas E.* Carres magiques au degre “*n*”. Paris, 1934);
- «Магические квадраты обладают некоторыми свойствами, которые можно использовать для коррекции ошибок, возникающих при передаче цифровой информации.

Эти свойства заключаются в том, что на некоторую совокупность произвольно выбираемых чисел можно, пользуясь принципами построения магических квадратов, наложить за счет введения избыточных чисел некоторые дополнительные условия.

На приемной стороне производится проверка условий, которым должна удовлетворять переданная совокупность чисел, и производится контроль правильности передачи и исправления ошибок» (Самойленко С.И. Помехоустойчивое кодирование. М., 1966).

В 1995 году в книге “Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ” (Ю.В. Чебраков; Санкт-Петербург, 1995) нами по существу проведен анализ современного состояния теории магических квадратов. В частности, приведены следующие факты, указывающие на то, что эта теория еще далека от своего завершения:

- i). Благодаря Б. Френикл (*Frenicle B. Des carres magiques / Divers ouvrages de math. et de phys. par. Ms. de l'Academie Royale des Sciences. 1693; Lettre a' B. Frenicle de Bessey et de Fermat a' Mersenne (1640) / Oeuvres de Fermat 2. Paris, 1894*) с 1640 года известно, что существует 880 различных классических магических квадратов 4×4 . Попытки произвести аналитический подсчет количества этих квадратов осуществляли

Л. Эйлер в 1776 году (*Euler L. De quadratis magicis / Leonardi Euleri Opera Omnia. Ser.1. Vol.7. 1923.*),

В.П. Ермаков в 1885 году (*Ермаков В.П. Полные волшебные квадраты. Средние волшебные квадраты с шестнадцатью клетками. Правильные волшебные квадраты с шестнадцатью клетками // Вестник опытной физики и элементарной математики. Киев, 1885 – 1886*),

Ф. Фиттинг в 1931 году (*Fitting F. Rein mathematische Behandlung des Problems der magischen Quadrate von 16 und 64 Feldern // Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung. Leipzig, 1931*),

К. Оллереншай и Г. Бонди в 1982 году (*Ollerenshaw K. and Bondi H. Magic squares of order four // Phil. Trans. R. Soc. A 306. London, 1982*).

Строго говоря, все четыре указанные попытки оказались неудачными {в Главе 3 книги “Магические квадраты. Теория чисел...” продемонстрировано, что после некоторой модернизации метод В.П. Ермакова – Ф. Фиттинг оказывается пригодным для осуществления аналитического под-

счета количества классических магических квадратов из 16-и клеток}.

ii). Используя список, составленный Б. Френикл {см. пункт (i)},

В. Эндрюс в 1908 году (*Andrews W.S. Magic squares and cubes. Chicago, 1917*),

Г. Дьюдени в 1910 году (*Dudeney H.E. Amusement in mathematics. London, 1917*),

Е.Я. Гуревич в 1969 году (*Гуревич Е.Я. Тайна древнего талисмана. М., 1969*)

обнаружили, что для обсуждаемых квадратов существует всего 12 различных типов структур. В 1982 году К. Оллереншау и Г. Бонди {см. пункт (i)} заявили, что они нашли аналитическое доказательство этого факта. В действительности, аналитическое доказательство этих авторов ошибочно (см. пункт А в Разделе 1.3.5 данной книги).

iii). До публикации в 1995 году нашей книги (см. ранее) для нетрадиционных магических квадратов из 16-и клеток не было известно общего количества различных

– рисунков их структур;

– разложений на сумму двух обобщенных латинских квадратов;

– классов в известных классификационных системах.

iv). В 1973 – 1975 годах Р. Шреппель и М. Биллер с помощью компьютера подсчитали, что общее количество классических магических квадратов размером 5×5 равно 68 826 306 {сообщение об этом опубликовано, например, в (*Gardner M. Time travel and other mathematical bewilderments. New York, 1988*)}. Однако, до сих пор не существует какой-либо общей системы классификации этих квадратов, и т.д.

Данная книга является *первым выпуском* курса лекций, посвященных изложению современного варианта *теории магических матриц* (ТММ). В ней излагаются развитый нами функционально-алгебраический подход к решению различных комбинаторных задач о классических и нетрадиционных магических матрицах (в частности, о классических и нетрадиционных магиче-

ских квадратах) и основные понятия и методы теории чисел, комбинаторного анализа, теории линейных уравнений и теории матриц, которые наиболее активно используются в ТММ.

Текст лекций написан простым понятным языком, содержит не только теоретический материал, но и описание разнообразных вычислительных алгоритмов и математических методов решения задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: от студентов вузов и университетов до преподавателей и научных сотрудников.

При изучении материалов данной книги *полезно* обратить внимание на то, что современная математика состоит из набора математических теорий, которые только на первый взгляд кажутся независимыми друг от друга. В действительности, собранные вместе математические теории образуют систему, которая по своим свойствам напоминает *живые* системы. Например, если различные математические теории и/или их совокупности уподобить различным функциональным системам одного живого организма, который в дальнейшем будем называть Математика, то легко заметить, что Математика обладает следующими свойствами живой системы:

- i) *если какая-либо функциональная система живого организма не справляется со свойственной ей задачей, то эту задачу решают другие функциональные системы*
{ применительно к Математике см. в данной книге
 - пункт (в) Раздела 2.1.2, где продемонстрировано, что для решения диофантового уравнения $ax + by - c = 0$, достаточно указанную задачу свести к задаче о решении соответствующего линейного сравнения с одним неизвестным;
 - Пример 2 Раздела 2.7.4, где продемонстрировано, что аналитическое решение задачи о нахождении наилучшего рационального приближения для иррационального числа $\alpha = \sqrt{7}$ можно найти в рамках общей теории рекуррентных уравнений;
 - Пример 4 Раздела 2.7.4, где продемонстрировано, что наиболее простое решение комбинаторной задачи о нахождении аналитической формулы для $P(n, k)$ {общего

числа $\langle a, k \rangle$ —разбиений} можно найти в рамках общей теории рекуррентных уравнений и это решение имеет вид $g_+(Q_{k-1}(n) + \Omega(k, n))$, где $g_+(y)$ — функция “ближайшее целое к y ”, $Q_{k-1}(n)$ — многочлен от n степени $k-1$, $\Omega(k, n)$ — добавочная часть, вид которой зависит от k и n };

ii) *функциональные системы живого организма легко адаптируются к изменениям условий внешней среды*

{в Разделе 1.5 приведены 4 различных определения такого известного еще со школы математического объекта, как комплексное число z :

1) $z = (a, b)$, где a, b — действительные числа,

2) $z = a + bi$, где $i^2 = -1$,

3) $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r — действительное число,

4) $z = re^{i\varphi}$,

и продемонстрировано, что выбор наиболее удобной формы представления числа z определяется условиями решаемых математических задач};

iii) *многие функциональные системы живого организма умеют решать свойственные им задачи несколькими разными способами*

{в Разделе 2.1.1 продемонстрировано, что частное решение линейного сравнения $ax - b \equiv 0 \pmod{m}$ можно найти по крайней мере тремя разными способами;

в Разделах 2.2.2, 2.2.4 и 2.2.5 продемонстрировано, что алгоритмические методы построения классических (магических) матриц порядка n можно описать различными аналитическими формулами};

iv) *функциональные системы живого организма способны решать свойственные им задачи даже в тех случаях, когда в условиях задач присутствуют разного рода неопределенности*

{в Разделе 1.3.5 приведены примеры некоторых неопределенностей, возникающих при исследованиях простых чисел;

в Примере 4 из Раздела 2.7.4 продемонстрировано, что для подсчета значений члена a_n числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\dots} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, \dots)$ можно использовать по крайней мере три различные аналитические формулы, не содержащие неопределенностей:

$$1) a_n = 3[n/6]^2 + ((n \bmod 6) - 3)[n/6] + [(6 - (n \bmod 6))/6],$$

где $[y]$ — функция “целая часть от y ”,

$$2) a_n = 47/72 - n/2 + n^2/12 - (-1)^n \{1/8 + (2/9)\cos(\pi n/3)\},$$

$$3) a_n = g_+(47/72 - n/2 + n^2/12), \text{ где } g_+(y) \text{ — функция “ближайшее целое к } y\text{”,}$$

и одну аналитическую формулу, содержащую неопределенность:

$$4) a_n = g_+(a_n(\xi)), \text{ где } a_n(\xi) = (n^2 - 6n + 8,5 + 2,5\xi)/12 \text{ и } -1 < \xi < 1\}.$$

Надеемся, что указанная нами *особенность* Математики вызовет у читателей дополнительный интерес к этой науке и поможет эффективно и правильно использовать изложенные в данной книге математические методы на практике.