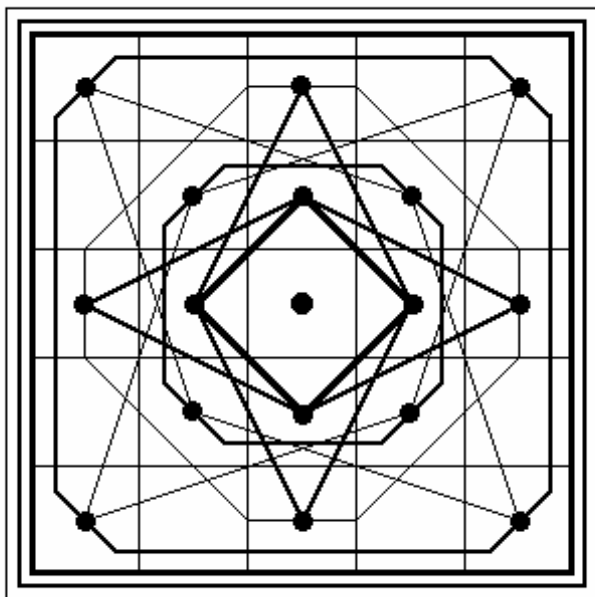


Лекции по Математике. Вып. ТММ-1

Ю. В. Чебраков

ТЕОРИЯ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ



Санкт-Петербург, 2010

УДК 511+512

ББК 22

Ч345

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор С.-Петербур. техн. ун-та

М. А. Салль

Кандидат физико-математических наук,
доцент ин-та истории естествознания и техники РАН

Л. И. Брылевская

Чебраков Ю. В.

Ч345 Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во «BBM», 2010. – 280 с. – (Лекции по Математике. Вып. ТММ-1.)

ISBN 978–5–9651–0357–7

Данная книга является *первым выпуском* курса лекций, посвященных изложению современного варианта *теории магических матриц* (ТММ). В ней излагаются развитый автором функционально-алгебраический подход к решению различных комбинаторных задач о классических и нетрадиционных магических матрицах (в частности, о классических и нетрадиционных магических квадратах) и основные понятия и методы теории чисел, комбинаторного анализа, теории линейных уравнений и теории матриц, которые наиболее активно используются в ТММ.

Текст лекций написан простым понятным языком, содержит не только теоретический материал, но и описание разнообразных вычислительных алгоритмов и математических методов решения задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: от студентов вузов и университетов до преподавателей и научных сотрудников.

УДК 511+512

ББК 22

© Ю. В. Чебраков, 2010

ISBN 978–5–9651–0357–7

да $(11^n - 1)/10$ являются простыми при $n = 17, 19, 73, 139$ и 907 и кандидатами в простые числа при $n = 1\,907, 2\,029, 4\,801, 5\,153$ и $10\,867$.

1.4. Действительные числа

Множество чисел, представимых в виде десятичных дробей, называется множеством **действительных** (вещественных) чисел **R** .

Как продемонстрировано далее (см. Разделы 1.4.1 и 1.4.2), все десятичные дроби можно разделить на два класса: бесконечные периодические десятичные дроби (рациональные числа) и бесконечные непериодические десятичные дроби (иррациональные числа). Отсюда следует, что

а) в состав множества действительных чисел **R** входят все рациональные и иррациональные числа;

б) каждому действительному числу соответствует одна конкретная точка на числовой оси X , и, наоборот, каждая точка на числовой оси X определяет одно конкретное действительное число.

1.4.1. Рациональные числа

Рациональные числа (дроби) имеют вид a/m , где a — целое число и m — натуральное число. Так как любое целое число c можно представить в виде дроби $c/1$, можно считать, что множество целых чисел **Z** входит в состав множества рациональных чисел **Q** . На множестве **Q** определены все четыре арифметические операции (сложение, умножение, вычитание и деление) и операции сравнения чисел (далее полагается, что a, b, c — целые числа; m, k, l — натуральные числа).

1) Операции сравнения:

- а) $a/m = b/k$, если $ak = bm$,
 $a/m > b/k$, если $ak > bm$,
 $a/m < b/k$, если $ak < bm$.
- б) $a/m = b/m$, если $a = b$,
 $a/m > b/m$, если $a > b$,
 $a/m < b/m$, если $a < b$.

- в) $a/t = a/k$, если $t = k$,
 $a/t > a/k$, если $t < k$,
 $a/t < a/k$, если $t > k$.
- г) $a/t < 1$ (**правильная** дробь), если $a < t$,
 $a/t = 1$ (**неправильная** дробь), если $a = t$,
 $a/t > 1$ (**неправильная** дробь), если $a > t$.
- д) $c/l = a/t$, если $c = ak$ и $l = tk$ {если $\text{НОД}(a, t) = 1$, то a/t — **несократимая** дробь}.

2) Арифметические операции:

- а) Сложение: $(a/t) + (b/k) = (ak + bt)/tk$.
- б) Вычитание: $(a/t) - (b/k) = (ak - bt)/tk$.
- в) Умножение: $(a/t) \times (b/k) = (a \times b)/(t \times k)$.
- г) Деление: $(a/t)/(b/k) = (ak)/(bt)$.

Пусть a/t — правильная рациональная дробь ($a/t < 1$).
Опишем **процедуру**, позволяющую отметить значение a/t точкой на числовой оси X :

- а) на числовой оси X разделим отрезок $[-1, 0]$ {если $a < 0$ } или $[0, 1]$ {если $a > 0$ } на t частей;
- б) отметим конец каждой части (начиная от точки 0) цифрами 1, 2, ..., $|a|$, ..., t и там, где стоит отметка $|a|$, поставим точку.

П р и м е р 1. Пусть требуется отметить на числовой оси X значение числа $3/8$.

Сначала на числовой оси X разделим отрезок $[0, 1]$ пополам {это можно сделать, например, с помощью циркуля и линейки (натянутой нитки)}:

$$[0, 1] = [0, 1/2] + [1/2, 1].$$

Затем пополам разделим отрезки $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$:

$$[0, 1] = [0, 1/4] + [1/4, 1/2] + [1/2, 3/4] + [3/4, 1].$$

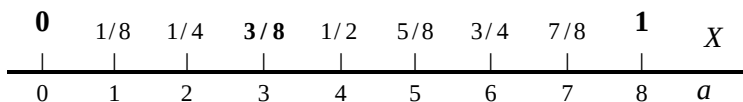


Рис. 3. Положение чисел $a/8$ ($a = 0, 1, \dots, 8$) на числовой оси X .

И, наконец, пополам разделим отрезки $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$ и $[3/4, 1]$:

$$[0, 1] = [0, 1/8] + [1/8, 1/4] + [1/4, 3/8] + [3/8, 1/2] + \\ + [1/2, 5/8] + [5/8, 3/4] + [3/4, 7/8] + [7/8, 1].$$

Отметим конец каждого из 8-и построенных отрезков (начиная от точки 0) цифрами 1, 2, ..., 8 (см. Рис. 3) и там, где стоит отметка 3, поставим точку.

Докажем, что

1. Между любыми двумя рациональными числами r_1 и r_2 содержится бесчисленное множество рациональных чисел.

2. Любое рациональное число r можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Доказательство.

1. Пусть $r_1 < r_2$. Очевидно, что между r_1 и r_2 находится рациональное число $r_3 = (r_1 + r_2)/2$ (среднее арифметическое чисел r_1 и r_2), то есть $r_1 < r_3 < r_2$. Но между r_1 и r_3 находится рациональное число $r_4 = (r_1 + r_3)/2$, а между r_3 и r_2 находится рациональное число $r_5 = (r_3 + r_2)/2$, то есть $r_1 < r_4 < r_3 < r_5 < r_2$. Очевидно, что указанным образом можно построить сколь угодно длинную цепочку рациональных чисел, находящихся между заданными числами r_1 и r_2 .

2. Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что a/m — правильная рациональная дробь ($a/m < 1$).

а) Пусть

$$a/m = 0,\overline{b_1b_2\dots b_k},$$

где $0,\overline{b_1b_2\dots b_k}$ — конечная десятичная дробь, в которой $b_1, b_2, \dots, b_k$ — некоторая последовательность цифр и $b_k \neq 0$. Тогда a/m можно представить в виде десятично-рациональной дроби $\overline{b_1b_2\dots b_k}/10^k$ (то есть, если a/m — конечная десятичная дробь, то a/m рационально) и в виде бесконечной периодической десятичной дроби $0,\overline{b_1b_2\dots(b_k-1)999\dots}$.

Докажем, что

$$0,\overline{b_1b_2\dots(b_k-1)999\dots} = 0,\overline{b_1b_2\dots b_k}$$

Действительно,

$$10^k \times 0,\overline{b_1b_2\dots(b_k-1)999\dots} = \overline{b_1b_2\dots(b_k-1)} + 0,999\dots$$

Обозначим бесконечную периодическую десятичную дробь $0,999\dots = 0,(9)$ через x : $x = 0,(9)$. Умножив равенство $x = 0,(9)$ на 10, получим $10x = 9,(9)$. Вычитая из равенства $10x = 9,(9)$ равенство $x = 0,(9)$, получим $9x = 9$ или $x = 1$. Таким образом,

$$10^k \times 0,\overline{b_1b_2\dots(b_k-1)999\dots} = \overline{b_1b_2\dots(b_k-1)} + 1 = \overline{b_1b_2\dots b_k}.$$

$$\text{Откуда } 0,\overline{b_1b_2\dots(b_k-1)999\dots} = \overline{b_1b_2\dots b_k} / 10^k = 0,\overline{b_1b_2\dots b_k}.$$

Легко доказать, что

$a/t = 0,\overline{b_1b_2\dots b_k}$ тогда и только тогда, когда число t не имеет простых делителей, отличных от 2 и/или 5.

Действительно, предположим, что $t = 2^k 5^l$. Возможны два случая: $l \leq k$ и $l > k$. При $l \leq k$ умножим числитель и знаменатель рациональной дроби на 5^{k-l} : $a/t = (a \times 5^{k-l}) / (2^k \times 5^l \times 5^{k-l}) = (a \times 5^{k-l}) / (2^k \times 5^k) = (a \times 5^{k-l}) / 10^k$, то есть в данном случае a/t является десятично-рациональной дробью и, значит, представимо в виде конечной десятичной дроби. Во втором случае (при $l > k$) доказательство отличается только тем, что числитель и знаменатель рациональной дроби умножаются на 2^{l-k} .

б) Пусть правильная рациональная дробь a/t не является конечной десятичной дробью (t имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и/или 5 {см. пункт (а)}). Тогда при делении целого числа a на t в остатке могут появиться только числа $1, 2, 3, \dots, t-2, t-1$ (см. Раздел 1.2.5). Поэтому в процессе деления неизбежно возникнет повторение остатка и, значит, в рассматриваемом случае a/t является бесконечной периодической десятичной дробью.

Докажем теперь, что

любая правильная бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой некоторое рациональное число.

Действительно, любую правильную бесконечную периодическую десятичную дробь a/m можно записать в виде

$$a/m = 0,\overline{c_1c_2\dots c_l(b_1b_2\dots b_k)},$$

где $\overline{c_1c_2\dots c_l}$ и $\overline{b_1b_2\dots b_k}$ — последовательности цифр соответственно неповторяющейся и повторяющейся частей бесконечной периодической десятичной дроби. Умножим a/m сначала на 10^{l+k} , а затем на 10^l :

$$10^{l+k} \times (a/m) = \overline{c_1c_2\dots c_lb_1b_2\dots b_k} + 0,\overline{(b_1b_2\dots b_k)},$$

$$10^l \times (a/m) = \overline{c_1c_2\dots c_l} + 0,\overline{(b_1b_2\dots b_k)}.$$

Вычитая второе произведение из первого, получим

$$(10^{l+k} - 10^l) \times (a/m) = \overline{c_1c_2\dots c_lb_1b_2\dots b_k} - \overline{c_1c_2\dots c_l}$$

или

$$a/m = (\overline{c_1c_2\dots c_lb_1b_2\dots b_k} - \overline{c_1c_2\dots c_l}) / (10^{l+k} - 10^l).$$

Таким образом, a/m равно отношению двух натуральных чисел и, следовательно, рационально.

Пример 2. Найти рациональное число, которому соответствует бесконечная периодическая десятичная дробь

$$0,21(857142).$$

Решение:

$$a/m = (21857142 - 21)/99999900 = 153/700.$$

1.4.2. Иррациональные числа

В Разделе 1.4.1 доказано, что любое рациональное число r

- можно представить в виде конечной и/или бесконечной периодической десятичной дроби;
- отметить значение r точкой на числовой оси X .

Числа α , которые можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, называются **иррациональными** {иррациональными (нерациональными) являются, например, числа $\sqrt{7}$ и $\sqrt[3]{6}$ (доказательство этого факта см. далее в Примере 1)}.

Докажем, справедливость следующего Утверждения:

Если рациональная несократимая дробь a/t является корнем алгебраического уравнения

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$$

с целыми коэффициентами $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$, то t является делителем c_n и a — делителем c_0 .

Следствие 1: Если в обсуждаемом уравнении $c_n = 1$, то $t = 1$.

Следствие 2: Если число вида $\sqrt[n]{a}$ не является целым числом, то оно является иррациональным числом.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть a/t — корень уравнения $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$. Это означает, что если вместо x подставить в уравнение число a/t , то получим равенство

$$c_n (a/t)^n + c_{n-1} (a/t)^{n-1} + \dots + c_2 (a/t)^2 + c_1 (a/t) + c_0 = 0$$

Умножив обе части равенства на t^n , получим

$$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} t + \dots + c_2 a^2 t^{n-2} + c_1 a t^{n-1} + c_0 t^n = 0.$$

Откуда

$$c_n a^n = -c_{n-1} a^{n-1} t - \dots - c_2 a^2 t^{n-2} - c_1 a t^{n-1} - c_0 t^n =$$

$$t(-c_{n-1} a^{n-1} - \dots - c_2 a^2 t^{n-3} - c_1 a t^{n-2} - c_0 t^{n-1});$$

$$c_0 t^n = a(-c_n a^{n-1} + c_{n-1} a^{n-2} t + \dots + c_2 a t^{n-2} + c_1 t^{n-1}).$$

Так как по условию c_n и a — целые числа и $\text{НОД}(a, t) = 1$, то из выражения для $c_n a^n$ следует, что t является делителем c_n (см. в Разделе 1.2.2 свойство 3 наибольшего общего делителя), а из выражения для $c_0 t^n$ следует, что a является делителем c_0 .

П р и м е р 1. Докажем, что $\sqrt{10}$ и $\sqrt[3]{6}$ являются иррациональными числами.

Действительно, число $\sqrt{10}$ является корнем уравнения $x^2 - 10 = 0$ ($n = 2$, $c_n = 1$), а число $\sqrt[3]{6}$ — корнем уравнения $x^3 - 6 = 0$ ($n = 3$, $c_n = 1$). Как сформулировано в Следствии 2 (см.

ранее), если число вида $\sqrt[n]{a}$ не является целым числом, то оно является иррациональным числом. Но из неравенства $4 < 7 < 9$ следует, что $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$ или $2 < \sqrt{7} < 3$, то есть $\sqrt{7}$ не является целым числом. Аналогично, из неравенства $1 < 6 < 8$ следует, что $\sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{8}$ или $1 < \sqrt[3]{6} < 2$, то есть $\sqrt[3]{6}$ также не является целым числом.

Отметим, что существует бесконечное множество таких иррациональных чисел α , которые не являются корнем ни одного алгебраического уравнения $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$. Все α такого рода называются **трансцендентными** числами. Например, трансцендентным является

- число Лиувилля $\alpha = 0,1100010\dots$, в котором после позиции «0,» цифра 1 находится на местах с номерами 1!, 2!, 3!, ... (это число построено французским математиком Лиувиллем в 1844 году);
- число $\pi = 3,141592653589793\dots$ (трансцендентность π доказана немецким математиком Фердинандом Линдеман в 1882 году);
- число Эйлера $e = 2,718281828459045\dots$ (трансцендентность e доказана Шарлем Эрмитом в 1873 году);
- любое число вида e^a при условии, что $a \neq 0$ и a — алгебраическое число (является корнем алгебраического уравнения $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$) (**теорема Линдемана**).

По определению (см. ранее) иррациональные числа α можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей

$$\alpha = a_0 + (a_1/10) + (a_2/10^2) + \dots (a_n/10^n) + \dots \quad (\alpha > 0)$$

или

$$\alpha = -\{a_0 + (a_1/10) + (a_2/10^2) + \dots (a_n/10^n) + \dots\} \quad (\alpha < 0),$$

где a_0 — целое число, а $a_1, \dots, a_n, \dots$ — некоторые цифры десятичной системы исчисления (0, 1, 2, ..., 9).

Конечные десятичные дроби

$$\underline{a}_n = a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \dots + a_n/10^n \quad \text{и}$$

$$\bar{a}_n = a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \dots + (a_n + 1)/10^n \quad (\alpha > 0)$$

или

$$\underline{a}_n = -\{a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \dots + (a_n + 1)/10^n\} \quad \text{и}$$

$$\bar{a}_n = -\{a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \dots + a_n/10^n\} \quad (\alpha < 0),$$

между которыми заключено число α , называются его **десятичными приближениями** с точностью до $1/10^n$, где число n — порядок приближения. Так как $\underline{a}_n < \alpha \leq \bar{a}_n$ при $\alpha > 0$ и $\underline{a}_n \leq \alpha < \bar{a}_n$ при $\alpha < 0$, $\underline{a}_n$ называется приближением числа α с **недостатком**, а $\bar{a}_n$ — приближением α с **избытком**.

Рассмотрим, как производятся **арифметические операции** с иррациональными числами.

Пусть положительные иррациональные числа α и β заданы системой неравенств

$$\underline{a}_n < \alpha \leq \bar{a}_n \quad \text{и} \quad \underline{b}_n < \beta \leq \bar{b}_n,$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда арифметические операции с числами α и β задаются следующими **правилами**

- а) **Сложение:** $\alpha + \beta = g$, если g задается системой неравенств $\underline{a}_n + \underline{b}_n < g \leq \bar{a}_n + \bar{b}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).
- б) **Вычитание:** $\alpha - \beta = g$, если g задается системой неравенств $\underline{a}_n - \bar{b}_n < g \leq \bar{a}_n - \underline{b}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).
- в) **Умножение:** $\alpha \times \beta = g$, если g задается системой неравенств $\underline{a}_n \times \underline{b}_n < g \leq \bar{a}_n \times \bar{b}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).
- г) **Деление:** $\alpha / \beta = g$, если g задается системой неравенств $\underline{a}_n / \bar{b}_n < g \leq \bar{a}_n / \underline{b}_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Можно доказать, что

- i) существует единственное число g , удовлетворяющее указанным в пунктах (а) – (г) системам неравенств;
- ii) арифметические операции, определенные в пунктах (а) – (г) для иррациональных чисел, применимы и к рациональ-

ным числам r_1 и r_2 , записанным в виде бесконечных периодических десятичных дробей;

- iii) множество иррациональных чисел *незамкнуто* по отношению к действиям сложения, вычитания, умножения и деления, то есть сумма, разность, произведение и частное двух иррациональных чисел может быть как иррациональным, так и рациональным числом.

Пример 2. Найти число $g = \alpha + \beta$, когда $\alpha = 2,35712\dots$ и $\beta = 11,11543\dots$.

Последовательно находим

$$\begin{array}{ll} \underline{a}_0 + \underline{b}_0 = 2 + 11 = 13; & \overline{a}_0 + \overline{b}_0 = 3 + 12 = 15; \\ \underline{a}_1 + \underline{b}_1 = 2,3 + 11,1 = 13,4; & \overline{a}_1 + \overline{b}_1 = 2,4 + 11,2 = 13,6; \\ \underline{a}_2 + \underline{b}_2 = 2,35 + 11,11 = 13,46; & \overline{a}_2 + \overline{b}_2 = 2,36 + 11,12 = 13,48; \\ \underline{a}_3 + \underline{b}_3 = 2,357 + 11,115 = 13,472; & \overline{a}_3 + \overline{b}_3 = 2,358 + 11,116 = 13,474; \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Таким образом, g задается системой неравенств:

$$\begin{array}{c} 13 < g \leq 15 \\ 13,4 < g \leq 13,6 \\ 13,46 < g \leq 13,48 \\ 13,472 < g \leq 13,474 \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

Обратим внимание, что если существует аналитический способ представления иррациональных чисел α и β {например, $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{6}$, $\cos(\pi/9)$, $\log 2$ }, то практическое осуществление арифметических операций с α и β возможно только тогда, когда известен алгоритм подсчета их значений с заданной точностью или метод приближения α и β рациональными числами.

Пример 3. Пусть требуется подсчитать значение иррационального числа $\alpha = \sqrt{x}$ с погрешностью ε .

а) **Алгоритм подсчета** значений числа $\alpha = \sqrt{x}$:

1. Присвоить i значение 0. В качестве $\overline{a}_i$ выбрать любое число, для которого $\overline{a}_i^2 \geq x$; положить $\underline{a}_i = x / \overline{a}_i$;

2. Положить $\bar{a}_{i+1} = (\bar{a}_i + \underline{a}_i)/2$, $\underline{a}_{i+1} = x / \bar{a}_{i+1}$.
3. Подсчитать значение $\Delta = \bar{a}_{i+1} - \underline{a}_{i+1}$. Если $\Delta < \varepsilon$, то перейти к пункту 4. Иначе, увеличить значение i на 1 и перейти к пункту 2.
4. Конец расчетов.

Например, если $\alpha = \sqrt{7}$ и $\varepsilon = 10^{-6}$, то

- при $i = 0$ $\bar{a}_0 = 3$ (так как $7 < 3^2 = 9$), $\underline{a}_0 = 7/3 \approx 2,3333333$;
- при $i = 1$ $\bar{a}_1 = (3 + 2,3333333) / 2 \approx 2,6666666$, $\underline{a}_1 = 7 / 2,6666666 \approx 2,6250000$;
- при $i = 2$ $\bar{a}_2 = (2,6666666 + 2,6250000) / 2 = 2,6458333$, $\underline{a}_2 = 7 / 2,6458333 \approx 2,6456693$;
- при $i = 3$ $\bar{a}_3 = (2,6458333 + 2,6456693) / 2 = 2,6457513$, $\underline{a}_3 = 7 / 2,6457513 \approx 2,6457513$.

Так как $\bar{a}_3$ и $\underline{a}_3$ совпадают в 7-ом знаке после запятой, расчеты закончены: $\alpha \approx 2,6457513$.

б) **Метод приближения** числа $\alpha = \sqrt{x}$ рациональными числами:

1. Найти набор чисел $q_1, q_2, \dots$:
 - а) Положить $i = 0$, $\alpha_i = \alpha$.
 - б) $q_{i+1} = [\alpha_i]$, $\alpha_{i+1} = 1/(\alpha_i - q_{i+1}) = (\alpha_i + q_{i+1})/(\alpha_i^2 - q_{i+1}^2)$
 - в) Увеличить значение i на 1 и перейти к пункту (б).
2. С помощью рекуррентных соотношений ($i = 2, 3, 4, \dots$)

$$a_i = q_i a_{i-1} + a_{i-2}, \quad m_i = q_i m_{i-1} + m_{i-2}$$

с начальными условиями $a_0 = 1$, $m_0 = 0$, $a_1 = q_1$ и $m_1 = 1$, подсчитать значения рациональных дробей a_i/m_i и выбрать из этих дробей требуемое рациональное приближение числа $\alpha = \sqrt{x}$.

Отметим, что

– в пункте 1(б) q_{i+1} — целая часть α_i , а $(\alpha_i - q_{i+1})$ — дробная часть α_i . Таким образом, $(\alpha_i - q_{i+1}) < 1$ и, значит, $1/(\alpha_i - q_{i+1}) > 1$;

– так как для иррациональных чисел $\alpha = \sqrt{x}$ и только для них последовательность чисел $q_1, q_2, \dots$ является бесконечной периодической последовательностью (*теорема Лагранжа*), ее можно записать как $q_1, q_2, \dots, q_s, (q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_t)$, где $q_1, q_2, \dots, q_s$ и $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_t$ — соответственно неповторяющаяся и повторяющаяся части последовательности $q_1, q_2, \dots$;

– найденные в пункте 2 дроби a_i / m_i являются *наилучшими* приближениями числа $\alpha = \sqrt{x}$ среди всех рациональных дробей, знаменатели которых не превосходят значений m_i ;

– дроби a_i / m_i с четными номерами больше исходного числа α , а дроби с нечетными номерами — меньше.

Например, если $\alpha = \sqrt{7}$ и $\varepsilon = 10^{-6}$, то

1) найдем набор чисел $q_1, q_2, \dots, q_s, (q_{s+1}, q_{s+2}, \dots, q_t)$:

$$q_1 = [\sqrt{7}] = 2, \quad \alpha_1 = (\sqrt{7} + 2)/(7 - 4) = (\sqrt{7} + 2)/3;$$

$$q_2 = [(\sqrt{7} + 2)/3] = 1, \quad \alpha_2 = 3(\sqrt{7} + 1)/(7 - 1) = (\sqrt{7} + 1)/2;$$

$$q_3 = [(\sqrt{7} + 1)/2] = 1, \quad \alpha_3 = 2(\sqrt{7} + 1)/(7 - 1) = (\sqrt{7} + 1)/3;$$

$$q_4 = [(\sqrt{7} + 1)/3] = 1, \quad \alpha_4 = 3(\sqrt{7} + 2)/(7 - 4) = \sqrt{7} + 2;$$

$$q_5 = [\sqrt{7} + 2] = 4, \quad \alpha_5 = (\sqrt{7} + 2)/(7 - 4) = (\sqrt{7} + 2)/3;$$

Так как $\alpha_5 = \alpha_1$, получаем, что $q_6 = q_2$, $q_7 = q_3$,

Таким образом, в обсуждаемом случае бесконечную последовательность чисел $q_1, q_2, \dots = 2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \dots$ можно записать в виде $2, (1, 1, 1, 4)$.

2) найдем рациональные приближения числа $\alpha = \sqrt{7}$:

$$a_0 = 1 \qquad m_0 = 0$$

$$a_1 = 2 \qquad m_1 = 1$$

$a_2 = a_1 + a_0 = 3$	$m_2 = m_1 + m_0 = 1$
$a_3 = a_2 + a_1 = 5$	$m_3 = m_2 + m_1 = 2$
$a_4 = a_3 + a_2 = 8$	$m_4 = m_3 + m_2 = 3$
$a_5 = 4a_4 + a_3 = 37$	$m_5 = 4m_4 + m_3 = 14$
$a_6 = a_5 + a_4 = 45$	$m_6 = m_5 + m_4 = 17$
$a_7 = a_6 + a_5 = 82$	$m_7 = m_6 + m_5 = 31$
$a_8 = a_7 + a_6 = 127$	$m_8 = m_7 + m_6 = 48$
$a_9 = 4a_8 + a_7 = 590$	$m_9 = 4m_8 + m_7 = 223$
$a_{10} = a_9 + a_8 = 717$	$m_{10} = m_9 + m_8 = 271$
$a_{11} = a_{10} + a_9 = 1307$	$m_{11} = m_{10} + m_9 = 494$
$a_{12} = a_{11} + a_{10} = 2024$	$m_{12} = m_{11} + m_{10} = 765$
$a_{13} = 4a_{12} + a_{11} = 9403$	$m_{13} = 4m_{12} + m_{11} = 3554$
$a_{14} = a_{13} + a_{12} = 11427$	$m_{14} = m_{13} + m_{12} = 4319$
$a_{15} = a_{14} + a_{13} = 20830$	$m_{15} = m_{14} + m_{13} = 7873$

3) подсчитаем значения дробей a_i/m_i для $i = 11, 12, 13, 14$ и 15:

$a_{11}/m_{11} =$	1 307 / 494	=	2,64574898
$a_{12}/m_{12} =$	2 024 / 765	=	2,64575163
$a_{13}/m_{13} =$	9 403 / 3 554	=	2,64575126
$a_{14}/m_{14} =$	11 427 / 4 310	=	2,64575133
$a_{15}/m_{15} =$	20 830 / 7 873	=	2,64575130

Так как $a_{13}/m_{13} < \alpha < a_{14}/m_{14}$ {дроби a_i/m_i с четными номерами больше исходного числа α , а дроби с нечетными номерами — меньше (см. ранее)}, а $(a_{14}/m_{14}) - (a_{13}/m_{13}) = 7 \times 10^{-8}$, получаем, что для приближения числа $\alpha = \sqrt{7}$ с погрешностью $\varepsilon = 10^{-6}$ достаточно взять рациональную дробь $a_{13}/m_{13} = 9\,403 / 3\,554$.