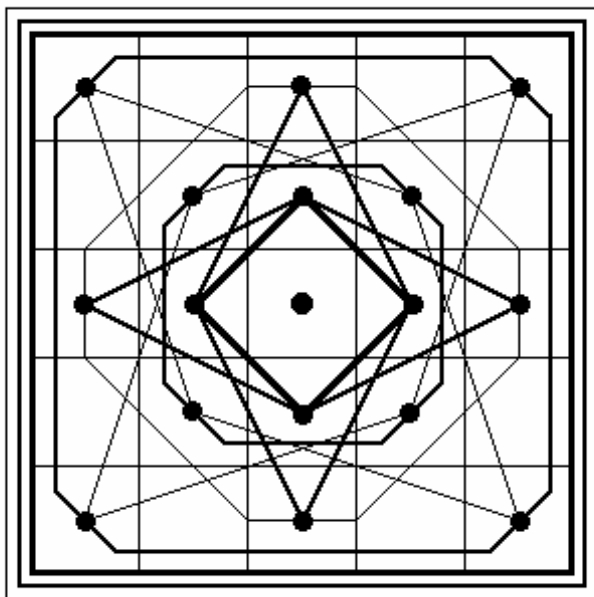


Лекции по Математике. Вып. ТММ-1

Ю. В. Чебраков

ТЕОРИЯ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ



Санкт-Петербург, 2010

УДК 511+512

ББК 22

Ч345

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор С.-Петербур. техн. ун-та

М. А. Салль

Кандидат физико-математических наук,
доцент ин-та истории естествознания и техники РАН

Л. И. Брылевская

Чебраков Ю. В.

Ч345 Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во «BBM», 2010. – 280 с. – (Лекции по Математике. Вып. ТММ-1.)

ISBN 978–5–9651–0357–7

Данная книга является *первым выпуском* курса лекций, посвященных изложению современного варианта *теории магических матриц* (ТММ). В ней излагаются развитый автором функционально-алгебраический подход к решению различных комбинаторных задач о классических и нетрадиционных магических матрицах (в частности, о классических и нетрадиционных магических квадратах) и основные понятия и методы теории чисел, комбинаторного анализа, теории линейных уравнений и теории матриц, которые наиболее активно используются в ТММ.

Текст лекций написан простым понятным языком, содержит не только теоретический материал, но и описание разнообразных вычислительных алгоритмов и математических методов решения задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: от студентов вузов и университетов до преподавателей и научных сотрудников.

УДК 511+512

ББК 22

© Ю. В. Чебраков, 2010

ISBN 978–5–9651–0357–7

2.3. Общие сведения о системах линейных уравнений с n неизвестными

2.3.1. Определения

Линейным уравнением с n неизвестными называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ — коэффициенты уравнения, b — свободный член, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — неизвестные. Если $b = 0$, то линейное уравнение называется **однородным**.

Совокупность m линейных уравнений с n одинаковыми неизвестными называется **системой** линейных уравнений. В общем случае систему из m линейных уравнений удобно представлять в следующем виде

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

где числа a_{ik} — коэффициенты уравнений, числа b_i — свободные члены уравнений, x_i — неизвестные, i — номер уравнения ($i = 1, 2, \dots, m$), k — номер неизвестной ($k = 1, 2, \dots, n$). Отметим, что число уравнений в системе не обязательно совпадает с числом неизвестных: m может быть меньше, равно или больше числа n .

Совокупность n чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ называется **решением** линейной системы уравнений, если после замены неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно числами $c_1, c_2, \dots, c_n$ каждое из уравнений системы превращается в тождество (справедливое равенство).

Система уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**, а система, не имеющая ни одного решения, **несовместной**.

Совместная система, имеющая единственное решение, называется **определенной**. Если же решений более одного, то система называется **неопределенной**.

Две системы линейных уравнений называются эквивалентными или **равносильными**, если любое решение одной из них является также решением другой, то есть если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Под **элементарными преобразованиями** системы линейных уравнений понимаются следующие операции:

- 1) умножение какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число;
- 3) перемена местами любых двух уравнений;
- 4) перемена местами любых двух столбцов, образованных элементами $a_{ij1}x_{j1}$ и $a_{ij2}x_{j2}$.

Докажем, что

при элементарных преобразованиях исходная система линейных уравнений переходит в равносильную систему.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При преобразовании 1 одно из уравнений системы, например первое, заменяется на уравнение

$$da_{11}x_1 + da_{12}x_2 + \dots + da_{1n}x_n = db_1.$$

Если к этому уравнению прибавить какое-либо другое уравнение системы, например второе, то есть выполнить преобразование 2, то первое уравнение системы примет вид:

$$(da_{11} + a_{21})x_1 + (da_{12} + a_{22})x_2 + \dots + (da_{1n} + a_{2n})x_n = db_1 + b_2.$$

Ясно, что если числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ удовлетворяют всем уравнениям исходной системы, то они удовлетворяют и этим двум уравнениям, то есть все решения исходной системы уравнений будут являться решениями новой системы.

Благодаря обратимости элементарных преобразований справедливо и обратное:

всякое решение новой системы уравнений является и решением исходной системы.

Следовательно, элементарные преобразования 1 и 2 действительно переводят исходную систему уравнений в равносильную (для преобразований 3, 4 это очевидно).

Два уравнения системы называются **линейно зависимыми**, если их с помощью элементарных преобразований можно привести к одинаковому виду.

В силу доказанных свойств элементарных преобразований система уравнений, из которой исключено одно из двух линейно зависимых уравнений, будет равносильна исходной системе.

2.3.2. Универсальный метод решения систем линейных уравнений с n неизвестными

Рассмотрим универсальный метод решения систем линейных уравнений с n неизвестными, называемый методом последовательного исключения неизвестных или *методом Гаусса*. Суть этого метода состоит в том, чтобы, используя элементарные преобразования 1 – 4 (см. Раздел 2.3.1), привести исходную систему линейных уравнений к трапецевидной форме. Для этого

1. Найдем в первом столбце исходной системы линейных уравнений коэффициент a_{k1} отличный от нуля (такой коэффициент обязательно найдется, так как в противном случае имели бы систему из m уравнений с $n - 1$ неизвестными). Изменив нумерацию уравнений (применив элементарное преобразование 3) и записав первым то уравнение, в котором коэффициент при x_1 не равен нулю, получим систему уравнений, в которой $a_{11} \neq 0$.
2. Положим $j = 1$.
3. Умножая последовательно j -е уравнение на $(-a_{ij}/a_{jj})$ ($i = j + 1, j + 2, \dots, m$) и складывая его с i -м уравнением системы, избавимся постепенно от присутствия неизвестного x_j во всех уравнениях системы, начиная с уравнения $j + 1$.
4. Положим $j = j + 1$. Если $j > m$, то переходим к пункту 6. Иначе переходим к пункту 5.
5. В преобразованной системе уравнений ищем коэффициент a_{kl} отличный от нуля (k и l независимо принимают значения $j, j + 1, \dots, m$). Пусть удалось найти такой коэффициент. В этом случае, применив элементарные преобразования 3, 4, добьемся того, чтобы в системе уравнений a_{kl} находилось на месте a_{jj} , и перейдем к пункту 3. Если не удалось найти a_{kl} отличное от нуля, то переходим к пункту 6.
6. Конец преобразований системы.

После того как система линейных уравнений с n неизвестными приведена к трапецевидной форме, можно очень просто решить вопрос о совместности системы, а также определить число решений и сами решения.

Действительно, после преобразований системы ее последнее k -е уравнение может иметь вид:

- а) $x_k = b'_k$ ($k = n$) — система **имеет единственное решение**: значение x_n известно из последнего уравнения, значение x_{n-1} находят из предпоследнего уравнения и т.д.;
- б) $0 = b'_k$ ($b'_k \neq 0$) — система **не имеет решений**: данное уравнение не может выполняться ни при каких значениях неизвестных;
- в) $x_k + a'_{k+1}x_{k+1} + \dots + a'_{kn}x_n = b'_k$ — система **имеет бесконечное множество решений**: значение x_k находят из последнего уравнения:

$$x_k = -a'_{k+1}x_{k+1} - \dots - a'_{kn}x_n + b'_k,$$

то есть x_k является линейной комбинацией $n - k$ неизвестных $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$, значения которых можно выбирать произвольным образом (в дальнейшем неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ будем называть **произвольно задаваемыми параметрами** решения).

Найденное значение x_k подставляют в предпоследнее уравнение и находят значение x_{k-1} (x_{k-1} также будет некоторой линейной комбинацией произвольно задаваемых параметров $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$) и т.д.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 9$$

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5$ | 2) $x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5$ | 3) $x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5$ |
| $x_2 - 4x_3 = -7$ | $x_2 - 4x_3 = -7$ | $x_2 - 4x_3 = -7$ |
| $4x_2 - 5x_3 = -6$ | $11x_3 = 22$ | $x_3 = 2$ |

Система 1 получена из исходной системы в результате — умножения первого уравнения на -2 и сложения его со вторым уравнением,

– умножения первого уравнения на -3 и сложения его с третьим уравнением.

Система 2 получена из системы 1 в результате умножения второго уравнения системы 1 на -4 и сложения его с третьим уравнением.

Система 3 получена из системы 2 умножением третьего уравнения системы 2 на $1/11$.

Из последнего уравнения третьей системы получаем $x_3 = 2$; из второго уравнения — $x_2 = -7 + 4x_3 = 1$; из третьего уравнения — $x_1 = 5 + 4x_2 - 3x_3 = 3$. Следовательно, исходная система уравнений имеет единственное решение

$$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2.$$

Отметим, что при решении системы линейных уравнений преобразования, требуемые методом Гаусса, можно совершать не над уравнениями, а над таблицей (матрицей) из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. Например, осуществленный выше переход от исходной системы к системе 3 можно представить в следующем виде:

Исходная система				Система 1				Система 2				Система 3			
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
1	-4	3	5	1	-4	3	5	1	-4	3	5	1	-4	3	5
2	-7	2	3	0	1	-4	-7	0	1	-4	-7	0	1	-4	-7
3	-8	4	9	0	4	-5	-6	0	0	11	22	0	0	1	2

Пр и м е р 2. Решить систему уравнений

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7$$

$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1$$

$$x_1 + 5x_2 - 15x_3 = 8$$

Исходная система				Система 1				Система 2			
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
2	-1	3	-7	2	-1	3	-7	2	-1	3	-7
1	2	-6	1	0	-5	15	-9	0	-5	15	-9
1	5	-15	8	0	-11	33	-23	0	0	0	-16

Таким образом, исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -7 \\ -5x_2 + 15x_3 &= -9 \\ 0 \times x_3 &= -16 \end{aligned}$$

Но полученная система несовместна, так как ее последнее уравнение

$$0 \times x_1 + 0 \times x_2 + 0 \times x_3 = -16$$

не может быть удовлетворено ни при каких значениях неизвестных. Следовательно, исходная система также несовместна.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$a = 2b;$$

$$b = 2c;$$

$$c = 2d;$$

$$b = c + 2d;$$

$$a = b + 2c;$$

$$a = c + b + 2d.$$

Система состоит из 6-и уравнений и содержит 4 неизвестных: a, b, c, d . Запишем ее в стандартной форме {так как в исходной системе все свободные члены равны нулю (*система однородна*), то в таблице коэффициентов исходной системы их можно опустить}:

Исходная система	Система 1	Система 2	Система 3
a b c d	a b c d	a b c d	a b c d
1 -2 0 0	1 -2 0 0	1 -2 0 0	1 -2 0 0
0 1 -2 0	0 1 -2 0	0 1 -2 0	0 1 -2 0
0 0 1 -2	0 0 1 -2	0 0 1 -2	0 0 1 -2
0 1 -1 -2	0 1 -1 -2	0 0 1 -2	0 0 0 0
1 -1 -2 0	0 1 -2 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1 -1 -1 -2	0 1 -1 -2	0 0 1 -2	0 0 0 0

Таким образом, исходная система равносильна следующей системе:

$$a - 2b = 0$$

$$b - 2c = 0$$

$$c - 2d = 0$$

Из последнего уравнения преобразованной системы получаем $c = 2d$; из второго уравнения $b = 2c = 4d$; из третьего уравнения $a = 2b = 8d$. Следовательно, исходная система уравнений имеет решение

$$a = 8d, b = 4d, c = 2d,$$

где d является произвольно задаваемым параметром (может принимать произвольные значения).

2.4. Методы решения определенных систем линейных уравнений с n неизвестными

2.4.1. Формулы Крамера

А. Пусть $n = 2$.

Система линейных уравнений с двумя неизвестными имеет следующий вид (см. Раздел 2.3.1):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

где числа a_{ik} — коэффициенты уравнений, числа b_i — свободные члены уравнений, x_i — неизвестные, i — номер уравнения ($i = 1, 2$), k — номер неизвестной ($k = 1, 2$). Решая эту систему методом Гаусса (см. Раздел 2.3.2), найдем, что

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \text{ и } x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}.$$

Отсюда получаем, что обсуждаемая система является **определенной**, то есть имеет единственное решение (см. Раздел 2.3.1), когда $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Будем называть

— квадратную таблицу размера 2×2 , составленную из коэффициентов уравнений a_{ik} , **матрицей** 2-го порядка и обозначать символом $A_{2 \times 2}$ или просто A :

$$A_{2 \times 2} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

— диагональ a_{11}, a_{22} **главной** диагональю матрицы A ;