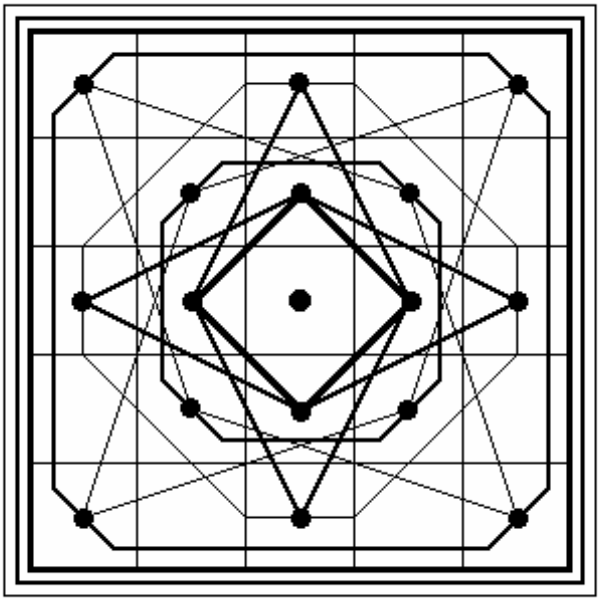
Лекции по Математике. Вып. ТММ-1

Ю. В. Чебраков

ТЕОРИЯ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ



Санкт-Петербург, 2010

УДК 511+512
ББК 22
Ч345

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор С.-Петерб. техн. ун-та
М. А. Салль
Кандидат физико-математических наук,
доцент ин-та истории естествознания и техники РАН
Л. И. Брылевская

Чебраков Ю. В.

Ч345 Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во «ВВМ», 2010. – 280 с. – (Лекции по Математике. Вып. ТММ-1.)

ISBN 978–5–9651–0357–7

Данная книга является *первым выпуском* курса лекций, посвященных изложению современного варианта *теории магических матриц* (ТММ). В ней излагаются развитый автором функционально-алгебраический подход к решению различных комбинаторных задач о классических и нетрадиционных магических матрицах (в частности, о классических и нетрадиционных магических квадратах) и основные понятия и методы теории чисел, комбинаторного анализа, теории линейных уравнений и теории матриц, которые наиболее активно используются в ТММ.

Текст лекций написан простым понятным языком, содержит не только теоретический материал, но и описание разнообразных вычислительных алгоритмов и математических методов решения задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: от студентов вузов и университетов до преподавателей и научных сотрудников.

УДК 511+512
ББК 22

© Ю. В. Чебраков, 2010

ISBN 978–5–9651–0357–7

$$a - 2b = 0$$
$$b - 2c = 0$$
$$c - 2d = 0$$

Из последнего уравнения преобразованной системы получаем $c = 2d$; из второго уравнения $b = 2c = 4d$; из третьего уравнения $a = 2b = 8d$. Следовательно, исходная система уравнений имеет решение

$$a = 8d,\ b = 4d,\ c = 2d,$$

где d является произвольно задаваемым параметром (может принимать произвольные значения).

2.4. Методы решения определенных систем линейных уравнений с n неизвестными

2.4.1. Формулы Крамера

А. Пусть $n = 2$.

Система линейных уравнений с двумя неизвестными имеет следующий вид (см. Раздел 2.3.1):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2,$$

где числа a_{ik} — коэффициенты уравнений, числа b_i — свободные члены уравнений, x_i — неизвестные, i — номер уравнения ($i = 1, 2$), k — номер неизвестной ($k = 1, 2$). Решая эту систему методом Гаусса (см. Раздел 2.3.2), найдем, что

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \text{ и } x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Отсюда получаем, что обсуждаемая система является ***определенной***, то есть имеет единственное решение (см. Раздел 2.3.1), когда $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Будем называть

– квадратную таблицу размера 2×2, составленную из коэффициентов уравнений a_{ik}, ***матрицей*** 2-го порядка и обозначать символом $A_{2\times2}$ или просто A:

$$A_{2\times2} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

– диагональ a_{11}, a_{22} ***главной*** диагональю матрицы A;

– диагональ a_{21}, a_{12} ***вспомогательной*** диагональю матрицы A;

– разность $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ***определителем*** матрицы A и обозначать символом $|A|$ {величина $|A|$ определяется из матрицы $A_{2\times 2}$ по следующему ***правилу***: надо взять произведение чисел, находящихся на главной диагонали, и вычесть из него произведение чисел, находящихся на вспомогательной диагонали};

– ***матрицами*** A_1 и A_2 такие матрицы, которые получаются из матрицы A заменой соответственно первого и второго столбца на свободные члены:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, $|A_1| = b_1a_{22} - b_2a_{12}$, а $|A_2| = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$, формулы для значений x_1 и x_2 перепишем в следующем удобном для запоминания виде (в виде ***формул Крамера***)

$$x_1 = |A_1| / |A|, \quad x_2 = |A_2| / |A|,$$

где $|A| \neq 0$.

П р и м е р 1. Решить систему из двух линейных сравнений с двумя неизвестными:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \equiv b_1 \pmod{m}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \equiv b_2 \pmod{m},$$

где a_{ik}, b_i и m — целые числа, x_i — неизвестные (i, k = 1, 2).

Используя формулы Крамера и тот факт, что со сравнениями можно обращаться как с уравнениями (см. в Разделе 1.2.5 свойство 2 сравнений), представим исходную систему сравнений в следующем виде:

$$|A|\, x_1 \equiv |A_1| \pmod{m}$$
$$|A|\, x_2 \equiv |A_2| \pmod{m}.$$

Откуда, предполагая, что НОД ($|A|$, m) = 1, получим (см. Раздел 2.1.1), что решением обсуждаемой системы являются

$$x_1 = c_1 + mk_1 \quad \text{и} \quad x_2 = c_2 + mk_2,$$

где k_1 и k_2 — произвольные целые числа, а c_1 и c_2 — какие-то из чисел 0, 1, …, $m - 1$.

Б. Пусть $n = 3$.

Система линейных уравнений с тремя неизвестными имеет следующий вид (см. Раздел 2.3.1):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3, \end{aligned}$$

где числа a_{ik} — коэффициенты уравнений, числа b_i — свободные члены уравнений, x_i — неизвестные, i — номер уравнения (i = 1, 2, 3), k — номер неизвестной (k = 1, 2, 3). Решая эту систему методом Гаусса (см. Раздел 2.3.2), найдем, что

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{13} - b_1a_{32}a_{23} - b_2a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}},$$

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2a_{33} + a_{21}b_3a_{13} + a_{31}b_1a_{23} - a_{31}b_2a_{13} - a_{11}b_3a_{23} - a_{21}b_1a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}},$$

$$x_3 = \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 + a_{31}a_{12}b_2 - a_{31}a_{22}b_1 - a_{11}a_{32}b_{23} - a_{21}a_{12}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}}.$$

Отсюда получаем, что обсуждаемая система является ***определенной***, то есть имеет единственное решение (см. Раздел 2.3.1), когда $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \neq 0$.

Будем называть

– квадратную таблицу размера 3×3, составленную из коэффициентов уравнений a_{ik}, ***матрицей*** 3-го порядка и обозначать символом $A_{3\times3}$ или просто A:

$$A_{3\times3} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

– диагональ a_{11}, a_{22}, a_{33} ***главной*** диагональю матрицы A;

– диагональ a_{31}, a_{22}, a_{13} ***вспомогательной*** диагональю матрицы A;

– разность $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$ ***определителем*** матрицы A и обозначать символом

$|A|$ {величина $|A|$ определяется из матрицы $A_{3\times3}$ по следующему ***правилу***:

i) к матрице $A_{3\times3}$ дописать справа первый и второй столбец;

ii) произведения элементов, стоящих на главной и параллельных ей диагоналях, взять со знаком плюс, а произведения элементов, стоящих на вспомогательной и параллельных ей диагоналях, — со знаком минус (см. Рис. 13)};

$$\begin{array}{c} + \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ - \end{array}$$

Рис. 13. К правилу подсчета величины $|A_{3\times3}|$.

– ***матрицами*** A_1, A_2 и A_3 такие матрицы, которые получаются из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбца на свободные члены:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Учитывая введенные обозначения, формулы для значений x_1, x_2 и x_3 перепишем в виде ***формул Крамера***:

$$x_1 = |A_1| / |A|, \quad x_2 = |A_2| / |A|, \quad x_3 = |A_3| / |A|,$$

где $|A| \neq 0$.

В. Рассмотрим ***общий*** случай, то есть будем считать, что задана следующая определенная система из n линейных уравнений (см. Раздел 2.3.1):

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{gathered}$$

где числа a_{ik} — коэффициенты уравнений, числа b_i — свободные члены уравнений, x_i — неизвестные, i — номер уравнения (i = 1, 2, ..., n), k — номер неизвестной (k = 1, 2, ..., n).

Для общего случая ***формулы Крамера*** имеют такой же простой вид, как и для частных случаев, рассмотренных в пунктах (А) и (Б):

$$x_1 = |A_1| / |A|, \quad x_2 = |A_2| / |A|, \quad \ldots, \quad x_n = |A_n| / |A|,$$

где

– матрица $A = A_{n\times n}$ — квадратная таблица размера $n\times n$, составленная из коэффициентов уравнений a_{ik}:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

– $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — матрицы, которые получаются из матрицы A заменой соответственно первого, второго, …, n-го столбца на свободные члены;

– $|A|$ — определитель матрицы $A_{n\times n}$ ($|A| \neq 0$), величина которого подсчитывается по ***формуле* 1**

$$|A_{n\times n}| = \sum_J (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \ldots \times a_{nj_n},$$

где суммирование проводится по $n!$ элементам множества J, содержащего все различные перестановки чисел $1,2,\ldots,n$; $\sigma\{j_k\}$ — количество ***инверсий*** (беспорядков) в перестановке $\{j_k\} = j_1, j_2, \ldots, j_n$ {о перестановках см. в Разделе 1.1.6}; a_{ij_k} — элементы матрицы A.

Доказательство справедливости формул Крамера для $n > 3$ перенесено в Раздел 2.4.3, так как для его осуществления необходимо знать некоторые свойства определителей, изложению которых посвящен Раздел 2.4.2.

В данном Разделе докажем, что значение $|A_{n\times n}|$ можно подсчитывать также по ***формуле* 2**

$$|A_{n\times n}| = \sum_G (-1)^{\sigma\{g_k\}} a_{g_1 1} \times a_{g_2 2} \times \ldots \times a_{g_n n},$$

которая отличается от формулы 1 тем, что у сомножителей строго фиксированными являются не первые индексы, а вторые.

Доказательство.

Из формулы 1 для $|A_{n\times n}|$ возьмем произвольное слагаемое s:

$$s = (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \ldots \times a_{nj_n},$$

Переставим, сомножители a_{ij_k} в s так, чтобы перестановка $\{j_k\}$, которая описывает нумерацию вторых индексов у a_{ij_k} в s, перешла в перестановку 1,2,…,n. Очевидно, что в этом случае перестановка 1,2,…,n, которая описывает нумерацию первых индексов у a_{ij_k} в s, перейдет в некоторую перестановку $\{g_k\} = g_1, g_2, \ldots, g_n$:

$$s = (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \ldots \times a_{nj_n} = (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{g_1 1} \times a_{g_2 2} \times \ldots \times a_{g_n n}.$$

Легко показать, что

перестановки $\{j_k\}$ *и* $\{g_k\}$ *имеют одинаковую четность.*

Действительно, в согласии с Утверждением 1 о транспозициях (см. Раздел 1.1.6), от перестановки $\{j_k\}$ можно перейти к перестановке 1,2,…,n при помощи некоторого набора $\{\delta_r\} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)$ последовательно выполняемых транспозиций:

$$a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \ldots \times a_{nj_n} \xrightarrow{\{\delta_r\}} a_{g_1 1} \times a_{g_2 2} \times \ldots \times a_{g_n n}.$$

Если перестановка $\{j_k\}$ является четной ($\sigma\{j_k\}$— четное число), то набор $\{\delta_r\}$ содержит четное количество транспозиций, так как по Следствию 1 из Утверждения 1 о транспозициях (см. Раздел 1.1.6) от четной перестановки $\{j_k\}$ можно перейти к четной перестановке 1,2,…,n только при помощи выполнения четного количества транспозиций. А так как переход от четной перестановки 1,2,…,n к перестановке $\{g_k\}$ осуществляется при помощи выполнения четного числа транспозиций, по Следствию 1 из Утверждения 1 о транспозициях $\{g_k\}$ является четной перестановкой. Случай, когда перестановка $\{j_k\}$ является нечетной, ана-

лизируется аналогичным образом {правда, со ссылкой на Следствие 2 из Утверждения 1 о транспозициях (см. Раздел 1.1.6)}.

Пусть $\sigma\{g_k\}$ — количество инверсий в перестановке $\{g_k\}$. Из того, что перестановки $\{j_k\}$ и $\{g_k\}$ имеют одинаковую четность, следует (по определению), что одинаковую четность имеют также $\sigma\{j_k\}$ и $\sigma\{g_k\}$. Таким образом, получаем, что

$$s = (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \ldots \times a_{nj_n} = (-1)^{\sigma\{g_k\}} a_{g_1 1} \times a_{g_2 2} \times \ldots \times a_{g_n n}$$

и, значит, оба варианта формул для $|A_{n\times n}|$ дают одинаковые значения $|A_{n\times n}|$.

Отметим, что с ростом n количество слагаемых в формулах для $|A_{n\times n}|$ растет очень быстро (как $n!$). Поэтому на практике задачи подсчета значений $|A_{n\times n}|$ обычно заменяют задачами подсчета значений $|A_{(n-l)\times(n-l)}|$, где $l \geq 1$. Свойства определителей, позволяющие уменьшать их размерность, указаны в Разделе 2.4.2.

2.4.2. Свойства определителей

Пусть задана матрица A:

$$A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Назовем

– матрицу $A^{\text{т}} = A^{\text{т}}_{n\times n}$ ***транспонированной*** по отношению к матрице A, если i-е столбцы (строки) матрицы $A^{\text{т}}$ являются i-ми строками (столбцами) матрицы A:

$$A^{\text{т}} = A^{\text{т}}_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} = B_{n\times n},$$

где элементы b_{ik} матрицы $B_{n\times n}$ связаны с элементами a_{ik} матрицы $A_{n\times n}$ соотношением {i — номер строки (i = 1, 2, ..., n), k — номер столбца (k = 1, 2, ..., n)}:

$$b_{ik} = a_{ki}\,;$$

– определитель $|A_{ik}|$ ***минором*** элемента a_{ik}, если матрица A_{ik} получена из матрицы $A_{n\times n}$ вычеркиванием i-ой строки и k-го столбца {очевидно, что матрица A_{ik} имеет размер $(n–1)\times(n–1)$};

– величину $\tilde{A}_{ik} = (-1)^{i+k}\,|A_{ik}|$ ***алгебраическим дополнением*** элемента a_{ik};

– матрицу $A_{n\times n}$ ***треугольной***, если все ее элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю;

– матрицу $A_{n\times n}$ ***ступенчатой***, если $a_{ik} = 0$ при $1 \le i \le m$ и $m+1 \le k \le n$. Ступенчатую матрицу $A_{n\times n}$ удобно представлять в следующем виде

$$A = A_{n\times n} = \begin{pmatrix} D_1 & O \\ B & D_2 \end{pmatrix},$$

где матрицы D_1 порядка m и D_2 порядка $n – m$ называют ***диагональными матричными клетками*** матрицы $A_{n\times n}$, B — прямоугольная матрица, имеющая $n – m$ строк и m столбцов, O — прямоугольная матрица, имеющая m строк и $n – m$ столбцов, заполненных нулями.

Докажем некоторые ***свойства*** определителя $|A_{n\times n}|$:

1) $|A_{n\times n}| = |\,A^{\text{т}}_{n\times n}\,|$

Следствие: *Любое утверждение, доказанное для строк определителя* $|A_{n\times n}|$, *справедливо и для столбцов этого определителя*;

2) перемена местами двух строк в матрице $A_{n\times n}$ приводит к изменению знака определителя $|A_{n\times n}|$;

3) если матрица $A_{n\times n}$ имеет две одинаковые строки, то ее определитель $|A_{n\times n}|$ равен нулю;

4) при $d > 1$ значение $|A_{n\times n}|$ увеличится (уменьшится) в d раз, если все элементы i-ой строки матрицы $A_{n\times n}$ умножить (разделить) на число d;

5) для любого $i = 1, 2, ..., n$ справедлива следующая ***формула*** разложения определителя $|A_{n\times n}|$ по элементам i-ой строки:

$$|A_{n\times n}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\tilde{A}_{ik} = (-1)^{i+1}a_{i1}\,|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}\,|A_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}\,|A_{in}|.$$

Следствие: *Для любого* $l \neq i$ (l, i = 1, 2, ..., n) $\sum_{k=1}^{n} a_{lk}\tilde{A}_{ik} = 0$;

6) если все элементы i-ой строки матрицы $A_{n\times n}$ представлены в виде суммы двух слагаемых

$$a_{ik} = c_{ik} + d_{ik} \quad (k = 1,2,\ldots,n),$$

то справедливо соотношение

$$|A_{n\times n}| = |C_{n\times n}| + |D_{n\times n}|,$$

где матрицы C и D отличаются от A только i-ой строкой: в матрице C i-ая строка содержит элементы $\{c_{ik}\}$, в матрице D — элементы $\{d_{ik}\}$;

7) значение $|A_{n\times n}|$ не изменится, если к элементам одной строки матрицы $A_{n\times n}$ прибавить соответствующие элементы другой ее строки, умноженные на число d;

8) для треугольной матрицы $A_{n\times n}$

$$|A_{n\times n}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}\times a_{22}\times\ldots\times a_{nn};$$

9) для ступенчатой матрицы $A_{n\times n}$

$$|A_{n\times n}| = |D_1|\times|D_2|,$$

где D_1 и D_2 — диагональные матричные клетки матрицы $A_{n\times n}$.

Доказательство.

1) Полагая, что $A^{\text{т}}_{n\times n} = B_{n\times n}$, и учитывая, что элементы b_{ik} матрицы $B_{n\times n}$ связаны с элементами a_{ik} матрицы $A_{n\times n}$ соотношением $b_{ik} = a_{ki}$ (см. начало данного Раздела), имеем

$$a_{1j_1}\times a_{2j_2}\times\ldots\times a_{nj_n} = b_{j_1 1}\times b_{j_2 2}\times\ldots\times b_{j_n n}.$$

Откуда с учетом формул 1 и 2 для $|A_{n\times n}|$ (см. Раздел 2.4.1) получаем, что

$$|A_{n\times n}| = \sum_{J}(-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1}\times a_{2j_2}\times\ldots\times a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{J}(-1)^{\sigma\{j_k\}} b_{j_1 1}\times b_{j_2 2}\times\ldots\times b_{j_n n} = |B_{n\times n}| = |A^{\text{т}}_{n\times n}|.$$

2) Предположим, что матрица B получается из матрицы A при помощи перемены местами строк с номерами l и $l + m$. Из формул 1 для $|A_{n\times n}|$ и $|B_{n\times n}|$ (см. Раздел 2.4.1) возьмем соответственно произвольные слагаемые s_A и s_B:

$$s_A = (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \ldots \times a_{lj_l} \times \ldots \times a_{l+mj_{l+m}} \times \ldots \times a_{nj_n},$$

$$s_B = (-1)^{\sigma\{g_k\}} b_{1g_1} \times b_{2g_2} \times \ldots \times b_{l\,g_l} \times \ldots \times b_{l+m\,g_{l+m}} \times \ldots \times b_{ng_n}.$$

Так как матрица B получена из матрицы A при помощи перемены местами строк с номерами l и $l + m$, получаем, что

$$b_{1g_1} \times b_{2g_2} \times \ldots \times b_{l\,g_l} \times \ldots \times b_{l+m\,g_{l+m}} \times \ldots \times b_{ng_n} =$$

$$a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \ldots \times a_{l+mj_{l+m}} \times \ldots \times a_{lj_l} \times \ldots \times a_{nj_n}.$$

Таким образом, перестановку $\{g_k\}$ можно получить из перестановки $\{j_k\}$ с помощью всего одной транспозиции $\delta(l, l+m)$. Но тогда, в согласии с Утверждением 1 о транспозициях (см. Раздел 1.1.6), $\sigma\{j_k\}$ и $\sigma\{g_k\}$ имеют разные четности и, значит,

$$(-1)^{\sigma\{g_k\}} = -(-1)^{\sigma\{j_k\}}.$$

Последнее означает, что $s_B = -s_A$ и, следовательно, справедливо соотношение

$$|B_{n\times n}| = -|A_{n\times n}|.$$

3) Предположим, что в матрице A одинаковыми являются строки с номерами l и $l + m$. Поменяв эти строки местами, получим матрицу B, которая ничем не будет отличаться от матрицы A. Таким образом, получаем, что $|A_{n\times n}| = |B_{n\times n}|$. Но по уже доказанному Свойству 2 должно быть $|B_{n\times n}| = -|A_{n\times n}|$. Откуда получаем, что $2|A_{n\times n}| = 0$ и, значит, $|A_{n\times n}| = 0$.

4) Предположим, что матрица B получается из матрицы A при помощи умножения элементов i-ой строки на число d. Из формул 1 для $|A_{n\times n}|$ и $|B_{n\times n}|$ (см. Раздел 2.4.1) возьмем соответственно произвольные слагаемые s_A и s_B:

$$s_A = (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times a_{2j_2} \times \ldots \times a_{ij_i} \times \ldots \times a_{nj_n},$$

$$s_B = (-1)^{\sigma\{g_k\}} b_{1g_1} \times b_{2g_2} \times \ldots \times b_{ig_i} \times \ldots \times b_{ng_n}.$$

Так как матрица B получена из матрицы A при помощи умножения элементов i-ой строки на число d, получаем, что

$$b_{1g_1}\times b_{2g_2}\times\ldots\times b_{ig_i}\times\ldots\times b_{ng_n}=$$

$$a_{1j_1}\times a_{2j_2}\times\ldots\times da_{ij_i}\times\ldots\times a_{nj_n}=d\times(a_{1j_1}\times a_{2j_2}\times\ldots\times a_{ij_i}\times\ldots\times a_{nj_n})$$

Последнее означает, что $s_B = d\,s_A$ и, следовательно, справедливо соотношение

$$|B_{n\times n}| = d\,|A_{n\times n}|.$$

5) А) Предположим, что $i = 1$ и в первой строке матрицы $A_{n\times n}$ отличен от нуля только элемент a_{11}.

Для обсуждаемого случая формула разложения определителя $|A_{n\times n}|$ по элементам i-ой строки примет вид:

$$|A_{n\times n}| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\tilde{A}_{1k} = a_{11}\,|A_{11}|.$$

Для того чтобы доказать справедливость этой формулы, из формулы 1 для $|A_{n\times n}|$ (см. Раздел 2.4.1) возьмем произвольное слагаемое s:

$$s=(-1)^{\sigma\{j_k\}}a_{1j_1}\times a_{2j_2}\times a_{3j_3}\times\ldots\times a_{nj_n}.$$

Так как при $j_1 = 2, 3, \ldots, n$ $a_{1j_1}=0$, приходим к выводу, что в выражении для s

i) $a_{1j_1}\times a_{2j_2}\times a_{3j_3}\times\ldots\times a_{nj_n}=a_{11}\times a_{2j_2}\times a_{3j_3}\times\ldots\times a_{nj_n}=$

$$a_{11}\times(a_{2j_2}\times a_{3j_3}\times\ldots\times a_{nj_n})=a_{11}\times(a_{1j_2-1}\times a_{2j_2-2}\times\ldots\times a_{n-1j_n-1})$$

{в последнем выражении у всех a_{ij_k}, находящихся в круглых скобках, уменьшили на единицу значения первых и вторых индексов};

ii) если $\{j_k\}=1, j_2, j_3,\ldots, j_n$, $\{j_k\}_1= j_2, j_3,\ldots, j_n$ и $\{j_k\}_2 = j_2-1, j_3-1,\ldots, j_n-1$, то $\sigma\{j_k\}= \sigma(j_k)_1= \sigma(j_k)_2$, где $\sigma\{j_k\}$, $\sigma(j_k)_1$, $\sigma(j_k)_2$ — количество инверсий соответственно в перестановках $\{j_k\}$, $\{j_k\}_1$ и $\{j_k\}_2$.

Из, (i) и (ii) получаем, что

$$s=a_{11}\times\{(-1)^{\sigma\{j_k\}}a_{2j_2}\times a_{3j_3}\times\ldots\times a_{nj_n}\}=$$

$$a_{11}\times\{(-1)^{\sigma\{j_k\}_1}a_{2j_2}\times a_{3j_3}\times\ldots\times a_{nj_n}\}=$$

$$a_{11}\times\{(-1)^{\sigma\{j_k\}_2}a_{1j_2-1}\times a_{2j_2-2}\times\ldots\times a_{n-1j_n-1}\}.$$

Откуда следует, что $|A_{n\times n}| = a_{11}\,|A_{11}|$.

Б) Предположим, что в i-ой строке матрицы $A_{n\times n}$ отличен от нуля только элемент a_{ik}. Очевидно, что этот случай легко привести к случаю, рассмотренному в пункте (А).

Действительно, чтобы элемент a_{ik} оказался в первой строке, i-ую строку матрицы $A_{n\times n}$ достаточно передвинуть на место первой строки, что можно сделать за (i – 1) перемен местами i-ой строки с верхними соседними строками. Затем, чтобы элемент a_{ik} оказался на месте элемента a_{11}, достаточно k-ый столбец матрицы $A_{n\times n}$ передвинуть на место первого столбца, что можно сделать за (k – 1) перемен местами k-го столбца с левыми соседними столбцами. В согласии с уже доказанным Свойством 2 для строк и столбцов (см. Следствие из Свойства 1), из-за осуществленных перемен местами строк и столбцов определитель $|A_{n\times n}|$ будет иметь знак $(-1)^{i-1+k-1} = (-1)^{i+k}$.

Таким образом, с учетом результата пункта (А) и изменения знака у $|A_{n\times n}|$, получим, что в обсуждаемом случае

$$|A_{n\times n}| = (-1)^{i+k}\, a_{ik}\, |A_{ik}| = a_{ik}\tilde{A}_{ik},$$

где $\tilde{A}_{ik}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ik}.

В) Пусть матрица $B_{n\times n}$ отличается от матрицы $A_{n\times n}$ только тем, что в ее i-ой строке находятся переменные $x_1, x_2, ..., x_n$. Очевидно, что алгебраические дополнения соответствующих элементов i-ой строки матриц $A_{n\times n}$ и $B_{n\times n}$ равны между собой:

$$\tilde{A}_{ik} = \tilde{B}_{ik}\ (k = 1, 2, ..., n).$$

Из формулы 1 для $|B_{n\times n}|$ (см. Раздел 2.4.1) возьмем произвольное слагаемое s:

$$s = (-1)^{\sigma\{j_k\}} b_{1j_1} \times b_{2j_2} \times \ldots \times b_{i-1j_{i-1}} \times x_{j_i} \times b_{i+1j_{i+1}} \times \ldots \times b_{nj_n}.$$

Отсюда ясно, что каждое слагаемое s содержит только одну какую-нибудь из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и, значит, $|B_{n\times n}|$ можно представить в следующем виде

$$|B_{n\times n}| = \sum_{l=1}^{n} x_l D_l,$$

где D_l — некоторые числа, не зависящие от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пусть переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ таковы, что $x_i = 0$ при $i \neq k$ и $x_k = 1$. В этом случае с учетом формулы $|B_{n\times n}| = \sum_{l=1}^{n} x_l D_l$ и результата пункта (Б), получим, что

$$|B_{n\times n}| = D_k = x_k \tilde{B}_{ik} = \tilde{B}_{ik}.$$

Отсюда, приходим к выводу, что

$$|B_{n\times n}| = \sum_{l=1}^{n} x_l D_l = \sum_{l=1}^{n} x_l \tilde{B}_{il}.$$

Формула разложения определителя $|A_{n\times n}|$ по элементам i-ой строки получается из последнего соотношения при $x_1 = a_{i1}, x_2 = a_{i2}, ..., x_n = a_{in}$.

6) В соотношении

$$|A_{n\times n}| = |C_{n\times n}| + |D_{n\times n}|$$

заменим определители $|A_{n\times n}|$, $|C_{n\times n}|$ и $|D_{n\times n}|$ на формулы их разложения по элементам i-ой строки. Учитывая, что в матрице A i-ая строка содержит элементы $\{c_{ik} + d_{ik}\}$, в матрице C — элементы $\{c_{ik}\}$ и в матрице D — элементы $\{d_{ik}\}$, получим следующее соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} (c_{ik} + d_{ik}) \tilde{A}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \tilde{A}_{ik} + \sum_{k=1}^{n} d_{ik} \tilde{A}_{ik},$$

справедливость которого очевидна.

7) Пусть матрица $B_{n\times n}$ отличается от матрицы $A_{n\times n}$ только тем, что в ее i-ой строке находится сумма двух слагаемых

$$a_{ik} + d a_{lk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где d — число, a_{ik} и a_{lk} — элементы соответственно i-ой и l-ой строк матрицы $A_{n\times n}$.

Из формулы 1 для $|B_{n\times n}|$ (см. Раздел 2.4.1) возьмем произвольное слагаемое s:

$$s = (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times \ldots \times a_{i-1\,j_{i-1}} \times (a_{ij_i} + d a_{lj_l}) \times a_{i+1\,j_{i+1}} \times \ldots \times a_{lj_l} \times \ldots \times a_{nj_n}.$$

В согласии с уже доказанными Свойствами 6 и 4,

$$s = (-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times \ldots \times a_{i-1\,j_{i-1}} \times a_{ij_i} \times a_{i+1\,j_{i+1}} \times \ldots \times a_{lj_l} \times \ldots \times a_{nj_n} +$$

$$d\{(-1)^{\sigma\{j_k\}} a_{1j_1} \times \ldots \times a_{i-1\,j_{i-1}} \times a_{lj_l} \times a_{i+1\,j_{i+1}} \times \ldots \times a_{lj_l} \times \ldots \times a_{nj_n}\}.$$

Откуда получаем соотношение

$$|B_{n\times n}| = |A_{n\times n}| + d|D_{n\times n}|,$$

где матрица $D_{n\times n}$ отличается от матрицы $A_{n\times n}$ только тем, что у нее одинаковы i-ая и l-ая строки. Но тогда по Свойству 3 $|D_{n\times n}| = 0$, и, значит, $|B_{n\times n}| = |A_{n\times n}|$.

8) Пусть в матрице $A_{n\times n}$ все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, то есть $a_{ik} = 0$ при $k > i$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Справедливость формулы $|A_{n\times n}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ легко доказать с помощью метода математической индукции.

Действительно, легко подсчитать, что $|A_{2\times 2}| = a_{11}a_{22}$. Предположим, что справедлива формула $|A_{(n-1)\times(n-1)}| = \prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}$. По Свойству 5 для столбцов (см. Следствие из Свойства 1)

$$|A_{n\times n}| = (-1)^{n+1} a_{n1}|A_{n1}| + (-1)^{n+2} a_{n2}|A_{n2}| + \ldots + (-1)^{n+n} a_{nn}|A_{nn}|.$$

Так как по условию при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ $a_{nk} = 0$, получаем, что

$$|A_{n\times n}| = a_{nn}|A_{nn}|.$$

Так как $|A_{nn}| = |A_{(n-1)\times(n-1)}| = \prod_{i=1}^{n-1} a_{ii}$, получаем окончательно, что

$$|A_{n\times n}| = a_{nn}\prod_{i=1}^{n-1} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

9) Доказательство проведем индукцией по m, где m — порядок диагональной матричной клетки D_1, находящейся в левом верхнем углу ступенчатой матрицы $A_{n\times n}$.

Если $m = 1$, то $D_1 = (a_{11})$ — матрица порядка 1. Для этого случая имеем (см. пункт (А) в доказательстве Свойства 5)

$$|A_{n\times n}| = a_{11}|D_2| = |D_1|\times|D_2|.$$

Пусть $m \geq 2$. Обозначим для матриц D_1 и $A_{n\times n}$ алгебраические дополнения элемента a_{1k} $(k = 1,2,\ldots,m)$ соответственно через $\widetilde{D}_{1k}$ и $\widetilde{A}_{1k}$. Тогда по Свойству 5 имеем

$$|D_1| = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}\widetilde{D}_{1k} = a_{11}|D_{11}| - a_{12}|D_{12}| + \ldots + (-1)^{1+m} a_{1m}|D_{1m}|$$

и, учитывая, что при $k > m$ $a_{1k} = 0$,

$$|A_{n\times n}| = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}\widetilde{A}_{1k} = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \ldots + (-1)^{1+m} a_{1m}|A_{1m}|.$$

Отметим, что матрицы A_{1k} $(k = 1,2,\ldots,m)$ являются ступенчатыми матрицами размера $(n-1)\times(n-1)$ и в этих матрицах

i) верхняя диагональная клетка $D_1^{(k)}$ имеет размер $(m-1)\times(m-1)$ и $|D_1^{(k)}| = |D_{1k}|$;

ii) нижняя диагональная клетка совпадает с нижней диагональной клеткой D_2 ступенчатой матрицы $A_{n\times n}$.

С учетом (i) и (ii) и индукционного предположения, сформулированного для $m-1$, имеем

$$|A_{n\times n}| = a_{11}|D_{11}|\times|D_2| - a_{12}|D_{12}|\times|D_2| + \ldots + (-1)^{1+m} a_{1m}|D_{1m}|\times|D_2| =$$
$$(a_{11}|D_{11}| - a_{12}|D_{12}| + \ldots + (-1)^{1+m} a_{1m}|D_{1m}|)\times|D_2| = |D_1|\times|D_2|.$$

2.4.3. Теорема Крамера

Теорема Крамера: *Если определитель $|A_{n\times n}|$ системы линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам*

$$x_1 = |A_1| / |A_{n\times n}|, \quad x_2 = |A_2| / |A_{n\times n}|, \quad \ldots, \quad x_n = |A_n| / |A_{n\times n}|,$$

где A_1, A_2, …, A_n — матрицы, которые получаются из матрицы $A_{n\times n}$ заменой соответственно первого, второго, …, n-го столбца на свободные члены (см. Раздел 2.4.1).

Доказательство.

А) Докажем сначала, что

если $|A_{n\times n}| \neq 0$ и решение системы линейных уравнений с n неизвестными существует, то оно единственно и может быть найдено по формулам, указанным в Теореме.

Пусть $|A_{n\times n}| \neq 0$ и $c_1, c_2, ..., c_n$ — решения обсуждаемой системы уравнений, то есть имеем n справедливых равенств

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1,$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = b_2,$$
$$... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; .$$
$$a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + ... + a_{nn}c_n = b_n,$$

Пусть l будет любым из чисел 1, 2, ..., n. Каждое из выписанных равенств сначала умножим соответственно на алгебраические дополнения $\tilde{A}_{il}$ элементов a_{il} и затем их сложим. В результате получим следующее равенство

$$c_1(a_{11}\tilde{A}_{1l} + a_{21}\tilde{A}_{2l} + ... + a_{n1}\tilde{A}_{nl}) + \ldots + c_l(a_{1l}\tilde{A}_{1l} + a_{2l}\tilde{A}_{2l} + ... + a_{nl}\tilde{A}_{nl})$$
$$+ \ldots + c_n(a_{1n}\tilde{A}_{1l} + a_{2n}\tilde{A}_{2l} + ... + a_{nn}\tilde{A}_{nl}) = b_1\tilde{A}_{1l} + b_2\tilde{A}_{2l} + ... + b_n\tilde{A}_{nl}.$$

В полученном равенстве {по Свойству 5 определителя $|A_{n\times n}|$ и следствию из этого свойства (см. Раздел 2.4.2)} $c_l(a_{1l}\tilde{A}_{1l} + a_{2l}\tilde{A}_{2l} + ... + a_{nl}\tilde{A}_{nl}) = c_l|A_{n\times n}|$, $b_1\tilde{A}_{1l} + b_2\tilde{A}_{2l} + ... + b_n\tilde{A}_{nl} = |A_l|$, а все остальные слагаемые равны нулю. Отсюда, учитывая, что $|A_{n\times n}| \neq 0$, получим, что при $l = 1, 2, ..., n$

$$c_l = |A_l| / |A_{n\times n}|.$$

Так как полученные формулы для c_l не зависят от c_l, приходим к выводу, что решение обсуждаемой системы уравнений единственно.

Б) Для доказательства существования решения подставим в m-е уравнение обсуждаемой системы уравнений вместо переменных x_k значения $|A_k| / |A_{n\times n}|$:

$$a_{m1}|A_1| / |A_{n\times n}| + a_{m2}|A_2| / |A_{n\times n}| + ... + a_{mn}|A_n| / |A_{n\times n}| =$$
$$= \{a_{m1} / |A_{n\times n}|\}(b_1\tilde{A}_{11} + b_2\tilde{A}_{21} + ... + b_n\tilde{A}_{n1})$$
$$+ \{a_{m2} / |A_{n\times n}|\}(b_1\tilde{A}_{12} + b_2\tilde{A}_{22} + ... + b_n\tilde{A}_{n2}) + \ldots$$
$$+ \{a_{mn} / |A_{n\times n}|\}(b_1\tilde{A}_{1n} + b_2\tilde{A}_{2n} + ... + b_n\tilde{A}_{nn}) =$$
$$= \{b_1 / |A_{n\times n}|\}(a_{m1}\tilde{A}_{11} + a_{m2}\tilde{A}_{12} + ... + a_{mn}\tilde{A}_{1n}) + \ldots$$
$$+ \{b_m / |A_{n\times n}|\}(a_{m1}\tilde{A}_{m1} + a_{m2}\tilde{A}_{m2} + ... + a_{mn}\tilde{A}_{mn}) + \ldots$$
$$+ \{b_n / |A_{n\times n}|\}(a_{m1}\tilde{A}_{n1} + a_{m2}\tilde{A}_{n2} + ... + a_{mn}\tilde{A}_{nn}) =$$
$$= \{b_1 / |A_{n\times n}|\}\times 0 + \ldots + \{b_m / |A_{n\times n}|\}\times|A_{n\times n}| + \ldots + \{b_n / |A_{n\times n}|\}\times 0 = b_m.$$

Так как m-ое уравнение оказалось верным, приходим к выводу, что числа $|A_k| / |A_{n\times n}|$ (k = 1, 2, ..., n) являются решениями обсуждаемой системы уравнений.

Доказательство Теоремы закончено.

2.4.4. Матрицы и действия с ними

В Разделе 2.3.2 продемонстрировано, что при решении системы линейных уравнений преобразования, требуемые (универсальным) методом Гаусса, можно совершать не над уравнениями, а над таблицей (матрицей) из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. Очевидно, что в общем случае матрица $A = \{a_{ik}\}$ имеет прямоугольную форму:

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

На множестве матриц $A_{m\times n}$ определены следующие ***основные операции*** (далее полагается, что A, B, C, E, O — матрицы; a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, e_{ik}, o_{ik} — элементы матриц соответственно A, B, C, E и O; α, β — числа; i, j, k, m, n,l — натуральные числа):

1) ***Операция сравнения***: $A_{m\times n} = B_{m\times n}$, если $a_{ik} = b_{ik}$.

2) ***Арифметические операции***:

а) *Сложение*: $A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$, если $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

б) *Вычитание*: $A_{m\times n} - B_{m\times n} = C_{m\times n}$, если $c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$.

в) *Умножение*: $A_{m\times l} \times B_{l\times n} = C_{m\times n}$, если $c_{ik} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} b_{jk}$.

г) *Умножение на число*: $\beta \times A_{m\times n} = B_{m\times n}$, если $b_{ik} = \beta\, a_{ik}$.

Замечания к пункту 2(в):

– элемент c_{ik} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы $A_{m\times l}$ на соответствующие элементы k-го столбца матрицы $B_{l\times n}$;
– из существования произведения AB вовсе не следует существование произведения BA. Например, для матриц $A_{m\times 1}$

(***столбец*** из m элементов) и $B_{1\times n}$ (***строка*** из n элементов) произведение AB всегда определено, а произведение BA определено только в том случае, когда $n = m$;

– из существования произведений AB и BA вовсе не следует, что $AB = BA$. Например, результат умножения столбца $A_{n\times 1}$ на строку $B_{1\times n}$ (см. предыдущее замечание) является матрицей $n\times n$, а результат умножения строки $B_{1\times n}$ на столбец $A_{n\times 1}$ является числом (матрицей размера 1×1);

3) ***Операция транспонирования***: $B_{n\times m} = (A_{m\times n})^{\mathrm{T}}$, если $b_{ik} = a_{ki}$.

Учитывая, что основные операции определены как операции над элементами соответствующих матриц, легко доказать следующие их свойства:

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; $\quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

$A + B = B + A$;

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; $\quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

$A + (B + C) = (A + B) + C$; $\quad A(BC) = (AB)C$;

$A(B + C) = AB + AC$; $\quad (B + C)A = BA + CA$.

$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$; $\quad (\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$;

$(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$; $\quad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

$|A_{n\times n}\times B_{n\times n}| = |A_{n\times n}|\times|B_{n\times n}|$

Если $O_{m\times n}$ — ***нулевая*** матрица ($o_{ik} = 0$), то

$$O_{m\times n} + B_{m\times n} = B_{m\times n},\ O_{m\times n}\times B_{n\times l} = O_{m\times l},\ C_{l\times m}\times O_{m\times n} = O_{l\times n}.$$

Если $E_{n\times n}$ — ***единичная*** матрица (на главной диагонали $E_{n\times n}$ находятся единицы, а все прочие элементы равны нулю), то

$$E_{m\times m}\times A_{m\times n} = A_{m\times n},\ A_{m\times n}\times E_{n\times n} = A_{m\times n},$$
$$E_{n\times n}\times A_{n\times n} = A_{n\times n}\times E_{n\times n} = A_{n\times n}.$$

Если $\hat{A}_{n\times n}$ — матрица ***взаимная*** для матрицы $A_{n\times n}$ ($\hat{A}^{\mathrm{T}}_{n\times n}$ получается из $A_{n\times n}$ заменой каждого элемента a_{ik}

на его алгебраическое дополнение $\widetilde{A}_{ik}$ и $\hat{A}_{n\times n} = (\hat{A}^{\mathrm{T}}_{n\times n})^{\mathrm{T}}$), то

$$A_{n\times n}\times \hat{A}_{n\times n} = \hat{A}_{n\times n}\times A_{n\times n} = |A_{n\times n}|\times E_{n\times n}.$$

Следствие: если $A_{n\times n}$ — ***невырожденная*** матрица ($|A_{n\times n}| \neq 0$), то

$$A_{n\times n}\times A^{-1}_{n\times n} = A^{-1}_{n\times n}\times A_{n\times n} = E_{n\times n},$$

где $A^{-1}_{n\times n}$ — матрица ***обратная*** для матрицы $A_{n\times n}$ и $A^{-1}_{n\times n} = (1/|A_{n\times n}|)\times \hat{A}_{n\times n}$.

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1},\ \ (\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1},\ \ (A^{-1})^{-1} = A.$$

Докажем, например, что если заданы матрицы $A_{m\times l}$ и $B_{l\times n}$, то

1) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

2) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

3) $|A_{n\times n}\times B_{n\times n}| = |A_{n\times n}|\times|B_{n\times n}|$.

4) $A_{n\times n}\times \hat{A}_{n\times n} = \hat{A}_{n\times n}\times A_{n\times n} = |A_{n\times n}|\times E_{n\times n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) В согласии с определением операции умножения матриц, $AB = \{\sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk}\}$. Равенства $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ следуют из равенств

$$\{\alpha\sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk}\} = \{\sum_{j=1}^{l}(\alpha a_{ij})b_{jk}\} = \{\sum_{j=1}^{l} a_{ij}(\alpha b_{jk})\}.$$

2) В согласии с определением операции умножения матриц, $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \{\sum_{j=1}^{l} b^{\mathrm{T}}{}_{ij}\ a^{\mathrm{T}}{}_{jk}\}$ и $AB = \{c_{ik}\} = \{\sum_{j=1}^{l} a_{ij}b_{jk}\}$. В согласии с определением операции транспонирования, $b^{\mathrm{T}}{}_{ij} = b_{ji}$ и $a^{\mathrm{T}}{}_{jk} = a_{kj}$. Следовательно,

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \{\sum_{j=1}^{l} b^{\mathrm{T}}{}_{ij}\ a^{\mathrm{T}}{}_{jk}\} = \{\sum_{j=1}^{l} a_{kj}b_{ji}\} = c_{ki} = \{c_{ik}\}^{\mathrm{T}} = (AB)^{\mathrm{T}}.$$

3) Используя заданные матрицы $A = A_{n\times n}$ и $B = B_{n\times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

сформируем ступенчатую матрицу $S_{2n\times 2n}$ следующего вида:

$$S = \begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix},$$

где O и E — соответственно нулевая и единичная матрицы порядка n, а $-E = -1\times E$. В согласии со Свойством 9 определителей (см. Раздел 2.4.2), $|S| = |A|\times|B|$.

Преобразуем матрицу S в матрицу S^* так, чтобы в правом нижнем углу матрицы S^* на месте элементов b_{ik} образовались нули. Для того чтобы освободить правый нижний угол матрицы S от элемента b_{ik} $(i,k = n+1, n+2, \dots, 2n)$, будем к столбцу с номером $n + k$ матрицы S прибавлять ее k-ый столбец, умноженный на b_{ik}.

Очевидно, что матрица S^* имеет вид:

$$S^* = \begin{pmatrix} A & C \\ -E & O \end{pmatrix}.$$

При этом выполненные преобразования таковы, что

i) $|S^*| = |S|$ (см. в Разделе 2.4.2 Свойство 7 определителей);

ii) элементы c_{ik} матрицы C, расположенной в правом верхнем углу матрицы S^*, имеют следующие значения

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

и, следовательно, в согласии с определением операции умножения матриц, $C = AB$.

Таким образом, получаем, что

$$S^* = \begin{pmatrix} A & AB \\ -E & O \end{pmatrix}.$$

и $|S^*| = |A|\times|B|$.

Поменяв в матрице S^* строки с номерами $n+1,\ \ n+2,\ldots,2n$ соответственно с 1-й, 2-й, …, n-й строкой, получим ступенчатую матрицу S^{**}:

$$S^{**} = \begin{pmatrix} -E & O \\ A & AB \end{pmatrix}.$$

В согласии со Свойствами 9 и 4 определителей (см. Раздел 2.4.2),

$$|S^{**}| = |-E|\times|AB| = (-1)^n \times |AB|.$$

В согласии со Свойством 2 определителей (см. Раздел 2.4.2),

$$|S^{**}| = (-1)^n \times |S^*| = (-1)^n \times |A|\times|B|.$$

Сравнивая полученные соотношения для $|S^{**}|$, получаем, что $|AB| = |A|\times|B|$.

4) Пусть $C = A_{n\times n}\times \hat{A}_{n\times n}$. В согласии с правилом умножения матриц,

$$c_{ik} = a_{i1}\tilde{A}_{k1} + a_{i2}\tilde{A}_{k2} + \ldots + a_{in}\tilde{A}_{kn}.$$

Но тогда, в согласии со Свойством 5 определителей и Следствием из него (см. Раздел 2.4.2),

$$c_{ii} = |A_{n\times n}|,\ \ c_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Откуда, в согласии с правилом умножения матриц на число, получаем, что $C = |A_{n\times n}|\times E_{n\times n}$.

Случай $C = \hat{A}_{n\times n}\times A_{n\times n}$ рассматривается аналогичным образом.

Минором k-го порядка прямоугольной матрицы $A_{m\times n}$ называется определитель

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix},$$

составленный из элементов матрицы $A_{m\times n}$, находящихся на пересечении выбранных k-строк и k-столбцов, где $i_1 > i_2 > \ldots > i_k$ и $j_1 > j_2 > \ldots > j_k$. Как легко подсчитать, для матрицы $A_{m\times n}$ можно составить $C(m,k)\times C(n,k)$ различных миноров k-го порядка (определение числа $C(l,i)$ см. в Разделе 1.1.7).

Докажем, что

если $k < m$, $k < n$ и в матрице $A_{m\times n}$ все миноры k-го порядка равны нулю, то равны нулю и все миноры более высокого порядка.

Действительно, пусть $|B_{(k+1)\times(k+1)}|$ — минор (k+1)-го порядка матрицы $A_{m\times n}$. В согласии со Свойством 5 определителей (см. Раздел 2.4.2)

$$|B_{(k+1)\times(k+1)}| = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\tilde{B}_{ik} .$$

Но $\tilde{B}_{ik} = (-1)^{i+k}|B_{ik}|$, где $|B_{ik}|$ — миноры k-го порядка матрицы $A_{m\times n}$ (см. начало Раздела 2.4.2). Из условия, что равны нулю все $|B_{ik}|$, следует, что равны нулю все $\tilde{B}_{ik}$, а тогда равно нулю и значение $|B_{(k+1)\times(k+1)}|$.

Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы $A_{m\times n}$ называется ***рангом*** матрицы $A_{m\times n}$ и обозначается символом r_A.

В Разделе 2.3.2 под элементарными преобразованиями системы линейных уравнений понимаются следующие операции:

i) умножение какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;
ii) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число;
iii) перемена местами любых двух уравнений.

При этом доказано, что

при элементарных преобразованиях исходная система линейных уравнений переходит в равносильную систему.

Очевидно, что, заменив в пунктах (i) – (iii) слова «уравнение» на слова «строка» («столбец»), получим набор ***элементарных преобразований*** матрицы $A_{m\times n}$, выполнение которых изменяет вид исходной матрицы, но

не меняет значение ранга матрицы.

Это свойство указанного набора элементарных преобразований удобно использовать для подсчета значения r_A.

П р и м е р. Найти ранг матрицы $A_{6\times4}$:

$$A_{6\times4}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 1 & -1 & -2 & 0\\ 1 & -1 & -1 & -2\end{pmatrix},\quad B_{6\times4}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Как продемонстрировано в Примере 3 Раздела 2.3.2, с помощью набора элементарных преобразований из матрицы $A_{6\times4}$ легко получить матрицу $B_{6\times4}$. Ранг матрицы $B_{6\times4}$ равен 3, так как минор 3-го порядка, расположенный в левом верхнем углу, не равен нулю, а все миноры 4-го порядка равны нулю. Следовательно, ранг (исходной) матрицы $A_{6\times4}$ также равен 3.

2.4.5. Метод обратной матрицы

Если матрицу определенной системы из n линейных уравнений (см. Раздел 2.3.1):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ .$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,$$

обозначить через $A= A_{n\times n}$, столбец из неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — через $X = X_{n\times1}$ и столбец из свободных членов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — через $B = B_{n\times1}$, то эту систему уравнений можно представить в ***матричной форме***:

$$AX = B.$$

Так как система уравнений является определенной, матрица A — невырожденная ($|A_{n\times n}| \neq 0$), и, значит, для A существует обратная матрица $A^{-1} = A^{-1}_{n\times n}$. Умножив обе части матричного уравнения слева на A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X = A^{-1}B.$$

Таким образом, для столбца решений обсуждаемой системы уравнений справедливо соотношение $X = A^{-1}B$.

П р и м е р. В Примере 1 Раздела 2.3.2 продемонстрировано, что решение $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ для системы уравнений

$$x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 5$$
$$2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 3$$
$$3x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 9$$

легко получить методом Гаусса. Найдем решение этой же системы уравнений методом обратной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -7 & 2 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -12 & -2 & 5 \\ -8 & -5 & -4 \\ 13 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} -12 & -8 & 13 \\ -2 & -5 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы было легко подсчитать значение $|A|$, преобразуем A в A^* следующим образом:

i) первая строка у A и A^* одинакова;

ii) вторая строка в A^* получается в результате сложения второй строки A с первой ее строкой, умноженной на –2;

iii) третья строка в A^* получается в результате сложения третьей строки A с первой ее строкой, умноженной на –3.

В согласии со Свойством 7 определителей (см. Раздел 2.4.2), $|A^*| = |A|$. Итак, имеем

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 16 = 11,$$

и, значит, $|A| = 11$, $A^{-1} = (1/11)\times \hat{A}$ и

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = (1/11)\times \hat{A}B = \begin{pmatrix} (-12\times 5 - 8\times 3 + 13\times 9)/11 \\ (-2\times 5 - 5\times 3 + 4\times 9)/11 \\ (5\times 5 - 4\times 3 + 1\times 9)/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание, что в методе обратной матрицы столбец решений определяется соотношением

$$X = A^{-1}B = (1/|A|)\times \hat{A}B,$$

и, значит, должна существовать следующая связь этого решения с решениями системы линейных уравнений, задаваемых формулами Крамера (см. Разделы 2.4.1 и 2.4.3):

$$(1/|A|)\times \hat{A}B = (1/|A|)\times \begin{pmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \dots \\ |A_n| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A_1|/|A| \\ |A_2|/|A| \\ \dots \\ |A_n|/|A| \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2, …, A_n — матрицы, которые получаются из матрицы A заменой соответственно первого, второго, …, n-го столбца на свободные члены.

Действительно, в согласии с определениями матрицы $\hat{A}$, матрицы B и операции умножения матриц, i-ый элемент матрицы $\hat{A}B$ (i = 1, 2, ..., n) имеет вид

$$b_1\tilde{A}_{1i} + b_2\tilde{A}_{2i} + \ldots + b_n\tilde{A}_{ni},$$

то есть совпадает с формулой разложения определителя матрицы A_i по элементам i-го столбца (см. в Разделе 2.4.2 Свойство 5 определителей).

2.5. Теоремы о решениях неопределенных систем линейных уравнений с n неизвестными

2.5.1. Теорема Кронекера – Капелли

Как указано в Разделе 2.3.1, в общем случае система из m линейных уравнений имеет следующий вид

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; ... \; .$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m.$$

При этом количество уравнений в системе не обязательно совпадает с количеством неизвестных: m может быть меньше, равно или больше числа n. Таким образом, в общем случае матрица A коэффициентов a_{ik} и расширенная матрица этой системы D = (A|B) имеют прямоугольную форму:

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad D = D_{m\times(n+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$