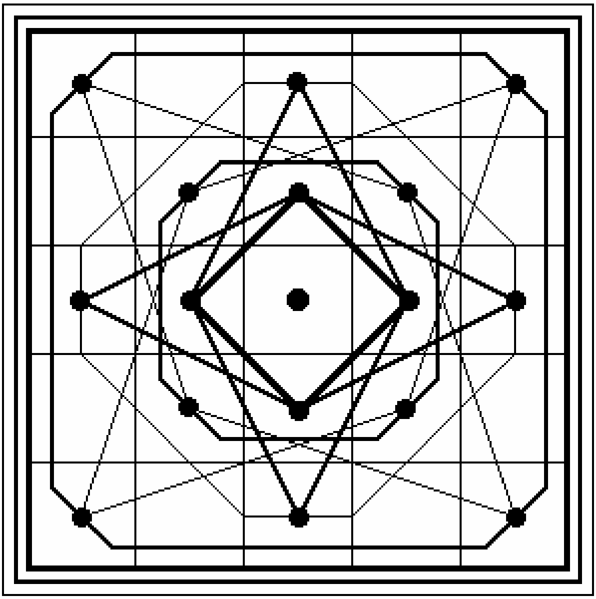
Лекции по Математике. Вып. ТММ-1

Ю. В. Чебраков

ТЕОРИЯ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ



Санкт-Петербург, 2010

УДК 511+512
ББК 22
Ч345

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор С.-Петерб. техн. ун-та
М. А. Салль
Кандидат физико-математических наук,
доцент ин-та истории естествознания и техники РАН
Л. И. Брылевская

Чебраков Ю. В.

Ч345 Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во «ВВМ», 2010. – 280 с. – (Лекции по Математике. Вып. ТММ-1.)

ISBN 978–5–9651–0357–7

Данная книга является *первым выпуском* курса лекций, посвященных изложению современного варианта *теории магических матриц* (ТММ). В ней излагаются развитый автором функционально-алгебраический подход к решению различных комбинаторных задач о классических и нетрадиционных магических матрицах (в частности, о классических и нетрадиционных магических квадратах) и основные понятия и методы теории чисел, комбинаторного анализа, теории линейных уравнений и теории матриц, которые наиболее активно используются в ТММ.

Текст лекций написан простым понятным языком, содержит не только теоретический материал, но и описание разнообразных вычислительных алгоритмов и математических методов решения задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: от студентов вузов и университетов до преподавателей и научных сотрудников.

УДК 511+512
ББК 22

ISBN 978–5–9651–0357–7

2527293132302826	1113151718161412	2123252728262422
1517192122201816	1921232526242220	2325272930282624
1719212324222018	2729313334323028	1315171920181614

Рис. 22. Построение магических матриц 3×3 из чисел S_5-ряда с использованием Λ^{-k} оператора.

2.7. Рекуррентные уравнения

2.7.1. Определения

Пусть $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ — некоторая последовательность целых чисел и $k = 1,2,\dots$. Уравнения, имеющие вид

$$a_{n+k} = x_{k-1}a_{n+k-1} + x_{k-2}a_{n+k-2} + \dots + x_0 a_n,$$

называются ***рекуррентными*** уравнениями порядка k ($k \geq 1$), где $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ — неизвестные.

Совокупность k чисел $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ называется ***решением*** рекуррентного уравнения порядка k, если после замены неизвестных $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ соответственно числами $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ рекуррентное уравнение превращается в равенство, справедливое для всех значений n. Если решение существует, то последовательность $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ называется ***рекуррентной*** последовательностью порядка k.

Примерами рекуррентных последовательностей являются геометрическая (k = 1) и арифметическая (k = 2) прогрессии, последовательность чисел Фибоначчи (k = 2) и др. (см. Примеры 1 – 3 в Разделе 1.1.5).

Пусть $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ — некоторая рекуррентная последовательность целых чисел порядка k, то есть (см. ранее) для членов этой последовательности выполняется рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + \dots + c_0 a_n.$$

Докажем, справедливость 2-х Утверждений.

1. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *является геометрической прогрессией вида* $\{\alpha^{n-1}\}_{n=1,2,\ldots}$, *то для выполнения указанного рекуррентного соотношения необходимо, чтобы* α *являлось корнем следующего алгебраического уравнения степени* k

$$\alpha^k - c_{k-1}\alpha^{k-1} - c_{k-2}\alpha^{k-2} - \ldots - c_0 = 0 .$$

Доказательство.

Заметим, что для случая, когда $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} = \{\alpha^{n-1}\}_{n=1,2,\ldots}$, исходное рекуррентное соотношение имеет вид

$$\alpha^{n+k-1} = c_{k-1}\alpha^{n+k-2} + c_{k-2}\alpha^{n+k-3} + \ldots + c_0\alpha^{n-1}$$

Откуда, сократив на α^{n-1}, получим, что α должно удовлетворять следующему алгебраическому уравнению степени k

$$\alpha^k - c_{k-1}\alpha^{k-1} - c_{k-2}\alpha^{k-2} - \ldots - c_0 = 0 ,$$

которое в дальнейшем будем называть ***характеристическим*** уравнением рекуррентной последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$.

2. *Если* $\{S_n\}_{n=1,2,\ldots} = \{\sum_{j=1}^{n} a_j\}_{n=1,2,\ldots}$, *то последовательность* $\{S_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *является рекуррентной последовательностью порядка* $k+1$ *и для последовательности* $\{S_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *характеристическое уравнение имеет вид*

$$(\alpha^k - c_{k-1}\alpha^{k-1} - c_{k-2}\alpha^{k-2} - \ldots - c_0)(\alpha - 1) = 0 .$$

Доказательство.

Очевидно, что для $l = n, n+1, \ldots, n+k$ справедливо соотношение

$$a_l = S_l - S_{l-1} .$$

Заменив в исходном рекуррентном соотношении все a_l на $S_l - S_{l-1}$, получим следующее равенство

$$S_{n+k} - S_{n+k-1} = c_{k-1}(S_{n+k-1} - S_{n+k-2}) + c_{k-2}(S_{n+k-2} - S_{n+k-3}) + \ldots + c_1(S_{n+1} - S_n) + c_0(S_n - S_{n-1}) .$$

Из предыдущего равенства имеем

$$S_{n+k}=(1+c_{k-1})S_{n+k-1}+(c_{k-2}-c_{k-1})S_{n+k-2}+\ldots+(c_0-c_1)S_n-c_0S_{n-1}.$$

Заменив в выписанном равенстве n на $n+1$, получим, что для последовательности $\{S_n\}_{n=1,2,\ldots}$ выполняется рекуррентное соотношение

$$S_{n+k+1}=(1+c_{k-1})S_{n+k}+(c_{k-2}-c_{k-1})S_{n+k-1}+\ldots+(c_0-c_1)S_{n+1}-c_0S_n.$$

Очевидно, что для этого соотношения характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^{k+1}-(1+c_{k-1})\alpha^k-(c_{k-2}-c_{k-1})\alpha^{k-1}-\ldots-(c_0-c_1)\alpha+c_0=0.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\alpha^{k+1}-(1+c_{k-1})\alpha^k-(c_{k-2}-c_{k-1})\alpha^{k-1}-\ldots-(c_0-c_1)\alpha+c_0=$$
$$(\alpha^k-c_{k-1}\alpha^{k-1}-c_{k-2}\alpha^{k-2}-\ldots-c_0)(\alpha-1).$$

Отметим, что ***основными*** задачами общей теории рекуррентных последовательностей являются

1. Определение минимального порядка k рекуррентных последовательностей.
2. Нахождение решений рекуррентных уравнений.
3. Нахождение корней характеристического уравнения.
4. Построение аналитических формул вида $a_n=f(n)$, где a_n — n-ый член рекуррентной последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$.

Методы решения задач 1 и 2 обсуждаются в Разделе 2.7.2, методы решения задачи 3 — в Разделе 2.7.3, методы решения задачи 4 — в Разделе 2.7.4. В Разделе 2.7.5 методы решения задач 1 и 2 используются для исследования задач о рекуррентных последовательностях, входящих в состав психологических тестов.

2.7.2. Метод нахождения минимального порядка рекуррентных уравнений

Пусть $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,N}$ — некоторая рекуррентная последовательность целых чисел. Объясним, каким образом можно найти ***минимальный*** порядок k этой последовательности:

1) Предположим, что $k=1$. Тогда для членов последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,N}$ должно выполняться рекуррентное уравнение

$$a_{n+1}=c_0 a_n,$$

что возможно только в том случае, если $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,N}$ является геометрической прогрессией (со знаменателем a_2/a_1).

2) Если $k\neq 1$, то предположим, что $k=2$. Тогда для членов последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,N}$ должно выполняться рекуррентное уравнение

$$a_{n+2}=c_1 a_{n+1}+c_0 a_n.$$

Полагая в этом уравнении $n=1,2$, получим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1c_0+a_2c_1=a_3 \\ a_2c_0+a_3c_1=a_4 \end{cases},$$

где {см. Раздел 2.4.1}

$$c_0=\frac{a_3a_3-a_2a_4}{a_1a_3-a_2a_2} \quad \text{и} \quad c_1=\frac{a_1a_4-a_2a_3}{a_1a_3-a_2a_2}.$$

Таким образом, если $k=2$, то должно выполняться рекуррентное соотношение

$$a_{n+2}=\left(\frac{a_1a_4-a_2a_3}{a_1a_3-a_2a_2}\right)a_{n+1}+\left(\frac{a_3a_3-a_2a_4}{a_1a_3-a_2a_2}\right)a_n.$$

С помощью полученного соотношения построим набор чисел $\{a_j^*\}_{j=5,6,\ldots,N}$. Если окажется, что при j = 5, 6, …, N $a_j=a_j^*$, то, значит, $k=2$.

3) Если $k\neq 2$, то предположим, что $k=3$ и т.д.

………………………………………………………………………….

l) Если $k\neq l-1$, то предположим, что $k=l$. Тогда для членов последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,N}$ должно выполняться рекуррентное уравнение

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + c_0 a_n .$$

Полагая в этом уравнении $n = 1,2,\ldots,k$, получим систему из k линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
a_1c_0 + \ldots + \ a_{k-1}c_{k-2} \ + \ \ a_kc_{k-1} &= a_{k+1}\\
a_2c_0 + \ldots + \ \ a_kc_{k-2} \ + \ a_{k+1}c_{k-1} &= a_{k+2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
a_kc_0 + \ldots + a_{2k-2}c_{k-2} + a_{2k-1}c_{k-1} &= a_{2k}
\end{aligned}$$

Матрицу коэффициентов этой системы обозначим через $A = A_{k\times k}$, столбец из неизвестных коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ — через $C = C_{k\times 1}$ и столбец из свободных членов a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_{2k} — через $B = B_{k\times 1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \ \ldots \\ a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{2k-1} \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \ldots \\ c_{k-1} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \\ \ldots \\ a_{2k} \end{pmatrix}.$$

Тогда полученную систему уравнений можно представить в матричной форме $AC = B$ и, если $|A| \neq 0$, то {см. Раздел 2.4.5}

$$C = A^{-1}B.$$

Подставив вычисленные значения C в рекуррентное соотношение, построим набор чисел $\{a_j^*\}_{j=2k+1,2k+2,\ldots,N}$:

$$a_j^* = R(j)A^{-1}B,$$

где $R(j)$ — строка размерности $1\times k$, содержащая следующие элементы последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots,N}$: a_j, $a_{j+1,} \ldots, a_{j+k-1}$. Если окажется, что при $j = 2k+1, 2k+2, \ldots,$ N $a_j = a_j^*$, то, значит, $k = l$.

П р и м е р 1. В Разделе 1.1.7 определены $\langle a, m, q\rangle$- и $\langle a, q\rangle$-разбиения:

i) ***⟨a, m, q⟩-разбиения*** — это разбиения натурального числа a на q различных частей, каждая из которых не превосходит m,

ii) $\langle$***a, q***$\rangle$***-разбиения*** — это $\langle a, m, q\rangle$-разбиения, в которых $m \geq a - q(q-1)/2$ и $a > q(q+1)/2$,

и доказано, что

$$\mathrm{P}(a, 3) = \mathrm{P}(6j + l, 3) = 3j^2 + (l-3)j + [(6-l)/6],$$

где $l = 0, 1, ..., 5$, $j = 1, 2, ...$, квадратные скобки означают целую часть и $\mathrm{P}(a, 3)$ — ***общее количество*** $\langle a, 3\rangle$-разбиений.

Подсчитаем первые тридцать значений последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} = \{\mathrm{P}(n, 3)\}$:

n ….	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n …	0	0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12

n ….	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a_n …	14	16	19	21	24	27	30	33	37	40	44	48	52	56	61

С помощью метода, рассмотренного в данном Разделе, легко определить, что последовательность $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} = \{\mathrm{P}(n, 3)\}$ является рекуррентной последовательностью, для которой минимальный порядок $k = 6$:

$$a_{n+6} = a_{n+5} + a_{n+4} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n .$$

П р и м е р 2. В Примере 3 Раздела 1.4.2 найдены рациональные приближения $r_n = a_n / m_n$ $(n = 0,1,\ldots,15)$ числа $\alpha = \sqrt{7}$:

r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
$\frac{1}{0}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{37}{14}$	$\frac{45}{17}$	$\frac{82}{31}$	$\frac{127}{48}$	$\frac{590}{223}$	$\frac{717}{271}$

r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}
$\frac{1307}{494}$	$\frac{2024}{765}$	$\frac{9403}{3554}$	$\frac{11427}{4319}$	$\frac{20830}{7873}$

С помощью метода, рассмотренного в данном Разделе, легко определить, что в указанных рациональных приближениях последовательности $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ и $\{m_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ являются рекуррентными последовательностями, для которых минимальный порядок $k = 8$:

$$r_{n+8} = \frac{a_{n+8}}{m_{n+8}} = \frac{16a_{n+4} - a_n}{16m_{n+4} - m_n}.$$

2.7.3. Методы нахождение корней характеристического уравнения

Как продемонстрировано в Разделе 2.7.1, для рекуррентной последовательности порядка k характеристическое уравнение имеет вид ***приведенного*** (значение коэффициента при неизвестном в степени k равно единице) алгебраического уравнения степени k

$$\alpha^k - c_{k-1}\alpha^{k-1} - c_{k-2}\alpha^{k-2} - \ldots - c_0 = 0.$$

Далее ***будем полагать***, что в этом уравнении коэффициенты $c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ являются целыми числами.

Докажем следующие Утверждения о корнях характеристического уравнения:

1. *Характеристическое уравнение не может иметь дробных корней.*

2. *Все целые корни характеристического уравнения являются делителями его свободного члена* (*коэффициента* c_0).

3. *Если корнем характеристического уравнения является целое, действительное или комплексное число* α_1, *то левая часть характеристического уравнения делится без остатка на двучлен* $\alpha - \alpha_1$.

4. *Если корнем характеристического уравнения является комплексное число* $\alpha_1 + \beta_1 i$, *то корнем этого уравнения будет и комплексное число* $\alpha_1 - \beta_1 i$.

Следствие из Утверждений 3 и 4: *Если корнем характеристического уравнения является комплексное число* $\alpha_1 + \beta_1 i$, *то левая часть характеристического уравнения делится без остатка на* $\alpha^2 - 2\alpha\alpha_1 + \alpha_1^2 + \beta_1^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1) Пусть $\alpha_1 = a/b$ — дробный корень характеристического уравнения, где a и b — взаимно простые целые числа (то есть дробь a/b несократима). Тогда должно выполняться соотношение

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k - c_{k-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{k-1} - c_{k-2}\left(\frac{a}{b}\right)^{k-2} - \ldots - c_0 = 0 .$$

Умножив это соотношение на $b^{k-1} \neq 0$, получим

$$\frac{a^k}{b} - \left(c_{k-1}a^{k-1} + c_{k-2}ba^{k-2} + \ldots + c_0 b^{k-1}\right) = 0 .$$

Но последнее соотношение выполняться не может, так как разность между несократимой дробью (a^k / b) и целым числом (выражение, находящееся в круглых скобках) не может равняться нулю. Следовательно, предположение о том, что корень характеристического уравнения $\alpha_1 = a/b$, является неверным.

2) Смотрите соответствующее Утверждение и его доказательство в начале Раздела 1.4.2.

3) Сначала докажем справедливость следующего вспомогательного Утверждения (***теорема Безу***):

Если многочлен $P_k(\alpha) = \alpha^k - c_{k-1}\alpha^{k-1} - c_{k-2}\alpha^{k-2} - \ldots - c_0$ *разделить на двучлен* $\alpha - \alpha_1$, *то в остатке получим число* R, *равное значению данного многочлена при* $\alpha = \alpha_1$, *то есть* $R = P_k(\alpha_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть при делении $P_k(\alpha)$ на $\alpha - \alpha_1$ получим многочлен $Q_{k-1}(\alpha)$, а в остатке число R, то есть

$$P_k(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)\, Q_{k-1}(\alpha) + R.$$

Подставив в это соотношение $\alpha = \alpha_1$, получим $R = P_k(\alpha_1)$, что и требовалось доказать.

Для доказательства справедливости Утверждения 3 осталось заметить, что, если α_1 — корень характеристического уравнения, то $P_k(\alpha_1) = 0$.

4) Вместо α подставим в характеристическое уравнение комплексное число $\alpha_1 + \beta_1 i$. Выполнив соответствующие действия и собрав отдельно члены, содержащие и не содержащие i, получим комплексное число

$$A + Bi = 0 .$$

Так как по предположению $\alpha_1 + \beta_1 i$ — корень характеристического уравнения, для комплексного числа $A + Bi$ $A = 0$ и $B = 0$.

Вместо α подставим теперь в характеристическое уравнение комплексное число $\alpha_1 - \beta_1 i$. Тогда в результате получим число, комплексно сопряженное (см. начало Раздела 1.5) с числом $A + Bi$, то есть $A - Bi$. Так как $A = 0$ и $B = 0$, число $A - Bi = 0$ и, значит, комплексное число $\alpha_1 - \beta_1 i$ также является корнем характеристического уравнения.

Продемонстрируем на конкретных примерах, каким образом Утверждения 1 – 4 используются при решении задач о нахождении корней характеристического уравнения.

П р и м е р 1. В Примере 1 Раздела 2.7.2 получено рекуррентное соотношение

$$a_{n+6} = a_{n+5} + a_{n+4} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n .$$

Для этого соотношения характеристическое уравнение имеет вид (см. Раздел 2.7.1)

$$\alpha^6 - \alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 .$$

i) В согласии с Утверждением 2, целыми корнями обсуждаемого уравнения могут быть только числа 1 и –1. Проверкой убеждаемся, что корнями являются оба числа. Таким образом, в согласии с Утверждением 3, левая часть характеристического уравнения делится без остатка на $(\alpha - 1)(\alpha + 1) = \alpha^2 - 1$.

Найдем частное от деления левой части характеристического уравнения на $\alpha^2 - 1$ (см. Таблицу 5):

$$\alpha^6 - \alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha - 1 = (\alpha^2 - 1)(\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha + 1) = 0 .$$

ii) Рассмотрим уравнение

$$\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha + 1 = 0 .$$

В согласии с Утверждением 2, целыми корнями этого уравнения могут быть только числа 1 и –1. Проверкой убеждаемся, что корнем является только число 1. Таким образом, в согласии с Утверждением 3, левая часть рассматриваемого уравнения делится без остатка на $\alpha-1$:

$$\alpha^4-\alpha^3-\alpha+1=(\alpha-1)^2(\alpha^2+\alpha+1)=0\,.$$

Таблица 5. Нахождение частного от деления левой части характеристического уравнения на α^2-1.

$$\begin{array}{l|l}
\alpha^6-\alpha^5-\alpha^4+\alpha^2+\alpha-1 & \alpha^2-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-(\alpha^6-\alpha^4)} & \alpha^4-\alpha^3-\alpha+1 \\
\quad -\alpha^5+\alpha^2+\alpha-1 & \\
\quad \underline{-(-\alpha^5+\alpha^3)} & \\
\quad -\alpha^3+\alpha^2+\alpha-1 & \\
\quad \underline{-(-\alpha^3+\alpha)} & \\
\qquad \alpha^2-1 & \\
\qquad \underline{-(\alpha^2-1)} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

iii) Как легко подсчитать, квадратное уравнение

$$\alpha^2+\alpha+1=0$$

имеет два комплексных корня

$$\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Анализируя результаты пунктов (i) – (iii), приходим к выводу, что левую часть обсуждаемого характеристического уравнения можно разложить на множители

$$\alpha^6-\alpha^5-\alpha^4+\alpha^2+\alpha-1=(\alpha-1)^3(\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1)=$$
$$(\alpha-1)^3(\alpha+1)(\alpha+1/2-i\sqrt{3}/2)(\alpha+1/2+i\sqrt{3}/2)\,.$$

Отсюда получаем, что характеристическое уравнение имеет четыре различных корня:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

При этом кратность корня α_1 равна 3, а кратность корней $\alpha_{2,3,4}$ равна 1.

П р и м е р 2.

i) Как известно (см. Пример 2 в Разделе 2.7.2), для иррационального числа $\alpha = \sqrt{7}$ рациональные приближения имеют вид $\{r_n\}_{n=0,1,2,\dots} = \{a_n / m_n\}_{n=0,1,2,\dots}$, где $\{a_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ = (1, 2, 3, 5, 8, 37, 45, 82, 127, …), $\{m_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ = (0, 1, 1, 2, 3, 14, 17, 31, 48, …), и для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{m_n\}$ справедливы рекуррентные соотношения $a_{n+8} = 16a_{n+4} - a_n$ и $m_{n+8} = 16m_{n+4} - m_n$.

Для указанных рекуррентных соотношений характеристическое уравнение имеет вид (см. Раздел 2.7.1)

$$\alpha^8 - 16\alpha^4 + 1 = 0.$$

В согласии с Утверждением 2, целыми корнями обсуждаемого уравнения могут быть только числа 1 и –1. Проверкой убеждаемся, что оба числа не являются корнями уравнения.

Пусть $\gamma = \alpha^4$ и $\beta = \alpha^2$ $(\gamma = \beta^2)$. Тогда

$$\alpha^8 - 16\alpha^4 + 1 = \gamma^2 - 16\gamma + 1 = (\beta^2 - 3\sqrt{7} - 8)(\beta^2 - 3\sqrt{7} + 8) =$$
$$(\alpha^2 - 3/\sqrt{2} + \sqrt{7}/\sqrt{2})(\alpha^2 + 3/\sqrt{2} - \sqrt{7}/\sqrt{2}) \times$$
$$(\alpha^2 - 3/\sqrt{2} - \sqrt{7}/\sqrt{2})(\alpha^2 + 3/\sqrt{2} + \sqrt{7}/\sqrt{2}) = 0.$$

Из последнего соотношения получаем, что корни уравнения $\alpha^8 - 16\alpha^4 + 1 = 0$ имеют следующий вид

$$\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{3/\sqrt{2} - \sqrt{7}/\sqrt{2}},\ \ \alpha_{3,4} = \pm\sqrt{3/\sqrt{2} - \sqrt{7}/\sqrt{2}},$$
$$\alpha_{5,6} = \pm i\sqrt{3/\sqrt{2} + \sqrt{7}/\sqrt{2}},\ \ \alpha_{7,8} = \pm\sqrt{3/\sqrt{2} + \sqrt{7}/\sqrt{2}};$$

ii) Числа каждой из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{m_n\}$, указанных в пункте (i), разделим на ***две*** группы: содержащие соответственно числа с нечетными номерами (последовательности $\{a_{2k+1}\}_{k=0,1,2,\dots}$ и $\{m_{2k+1}\}_{k=0,1,2,\dots}$) и числа с четными номерами (последовательности $\{a_{2k+2}\}_{k=0,1,2,\dots}$ и $\{m_{2k+2}\}_{k=0,1,2,\dots}$). Легко установить, что для четырех указанных числовых последовательностей характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^4 - 16\alpha^2 + 1 = 0$$

и {см. пункт (i)} это уравнение имеет следующие корни

$$\alpha_{1,2} = \pm(3/\sqrt{2} - \sqrt{7}/\sqrt{2}), \quad \alpha_{3,4} = \pm(3/\sqrt{2} + \sqrt{7}/\sqrt{2});$$

iii) Числа каждой из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{m_n\}$, указанных в пункте (i), разделим на ***четыре*** группы: содержащие соответственно числа с номерами $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ и $n = 4k+4$ $(k = 0,1,2,\ldots)$. Легко установить, что для восьми указанных числовых последовательностей характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^3 - 255\alpha + 16 = 0$$

и это уравнение имеет следующие корни

$$\alpha_{1,2} = 8 \pm 3\sqrt{7}, \quad \alpha_3 = -16;$$

iv) Вместо характеристического уравнения $\alpha^8 - 16\alpha^4 + 1 = 0$, которое исследовалось в пункте (i), рассмотрим уравнение

$$\alpha^8 - 16\alpha^4 - 1 = 0.$$

Пусть $\gamma = \alpha^4$ и $\beta = \alpha^2$ $(\gamma = \beta^2)$. Тогда

$$\alpha^8 - 16\alpha^4 - 1 = \gamma^2 - 16\gamma - 1 = (\beta^2 - 8 - \sqrt{65})(\beta^2 - 8 + \sqrt{65}) =$$

$$(\alpha^2 - \sqrt{8+\sqrt{65}})(\alpha^2 + \sqrt{8+\sqrt{65}})\times$$

$$(\alpha^2 - i\sqrt{\sqrt{65}-8})(\alpha^2 + i\sqrt{\sqrt{65}-8}) = 0.$$

Из первой и второй скобок последнего соотношения получим, что

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt[4]{8+\sqrt{65}}, \quad \alpha_{3,4} = \pm i\sqrt[4]{8+\sqrt{65}}.$$

Из третьей и четвертой скобок {с учетом того, что

$$\sqrt{bi} = \pm\left(\sqrt{b/2} + i\,\mathrm{Sign}(b)\sqrt{b/2}\right),$$

где $\mathrm{Sign}(b) = b/|b|$ (см. в Разделе 1.5 формулу для подсчета значения квадратного корня из комплексного числа $a+bi$)}, получим

$$\alpha_{5,6} = \pm\left(\sqrt[4]{\sqrt{65}-8}/\sqrt{2}\right) + i\sqrt[4]{\sqrt{65}-8}/\sqrt{2},$$

$$\alpha_{7,8} = \pm\left(\sqrt[4]{\sqrt{65}-8}\,/\,\sqrt{2}\right) - i\,\sqrt[4]{\sqrt{65}-8}\,/\,\sqrt{2}\ .$$

2.7.4. Методы построения аналитических формул для n-ых членов рекуррентных последовательностей

А. Предположим, что характеристическое уравнение (см. Разделы 2.7.1 и 2.7.3) имеет k различных (действительных и/или мнимых) корней: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Докажем, что в этом случае

аналитическая формула для n-го члена последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *имеет вид*

$$a_n = b_1(\alpha_1)^{n-1} + b_2(\alpha_2)^{n-1} + \ldots + b_k(\alpha_k)^{n-1},$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_k$ *— коэффициенты* (***Утверждение* 1**).

Доказательство.

Полагая в аналитической формуле $n = 1,2,\ldots,k$, получим систему из k линейных уравнений:

$$\begin{aligned} b_1 + \quad & b_2 + \ldots + \quad b_k = a_1 \\ \alpha_1 b_1 + \quad & \alpha_2 b_2 + \ldots + \quad \alpha_k b_k = a_2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_1)^{k-1} b_1 + {} & (\alpha_2)^{k-1} b_2 + \ldots + (\alpha_k)^{k-1} b_k = a_k\,. \end{aligned}$$

Так как последовательности $\{\alpha_l^{n-1}\}_{n=1,2,\ldots}$ $(l = 1,2,\ldots,k)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (см. Раздел 2.7.1), очевидно, что доказываемое утверждение верно, если полученная система уравнений позволяет единственным образом определить значения неизвестных коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Но для этого достаточно (см. Раздел 2.5), чтобы однородная система уравнений

$$\begin{aligned} b_1 + \quad & b_2 + \ldots + \quad b_k = 0\,, \\ \alpha_1 b_1 + \quad & \alpha_2 b_2 + \ldots + \quad \alpha_k b_k = 0\,, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha_1)^{k-1} b_1 + {} & (\alpha_2)^{k-1} b_2 + \ldots + (\alpha_k)^{k-1} b_k = 0\,. \end{aligned}$$

имела только нулевое решение.

Для *доказательства* того, что последнее условие выполнено, предположим, что $b_1, b_2, \ldots, b_k$ — решение однородной системы уравнений, $b_1 \neq 0$ и $M(x)$ — такой многочлен степени $k - 1$, что (i) $M(x) = 0$ при $x = b_2, b_3, \ldots, b_k$ и (ii) $M(x) = 1$ при $x = b_1$. Легко получить, что многочлен $M(x)$, удовлетворяющий условиям (i) и (ii), имеет вид

$$M(x) = \frac{(x - b_2)(x - b_3)\ldots(x - b_k)}{(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)\ldots(b_1 - b_k)} = m_{k-1}x^{k-1} + \ldots + m_1 x + m_0 .$$

Действительно, из условия (i) получим, что $M(x)$ должен иметь вид

$$M(x) = c(x - b_2)(x - b_3)\ldots(x - b_k) ,$$

где c — некоторое число. Из условия (ii) получим, что

$$1 = c(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)\ldots(b_1 - b_k)$$

и, значит,

$$c = \frac{1}{(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)\ldots(b_1 - b_k)} .$$

Умножив каждое l-ое уравнение однородной системы на m_{l-1} и сложив полученные k уравнений, получим, что

$$b_1(m_{k-1}\alpha_1^{k-1} + \ldots + m_1\alpha_1 + m_0) + b_2(m_{k-1}\alpha_2^{k-1} + \ldots + m_1\alpha_2 + m_0) + \ldots +$$
$$b_k(m_{k-1}\alpha_k^{k-1} + \ldots + m_1\alpha_k + m_0) = 0$$

или

$$b_1 M(\alpha_1) + b_2 M(\alpha_2) + \ldots + b_k M(\alpha_k) = 0 .$$

Откуда, учитывая условия (i) и (ii), получаем, что $b_1 = 0$, что противоречит предположению. Доказательство закончено.

П р и м е р 1. Известно, что для некоторой числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ с $a_1 = 3$ и $a_2 = 14$ рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$. Требуется найти аналитические формулы для n-го члена последовательности (i) $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ и (ii) $\{S_n\}_{n=1,2,\ldots} = \{\sum_{j=1}^{n} a_j\}_{n=1,2,\ldots}$.

i) Для рассматриваемого случая характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^2-\alpha-6=0 \quad \text{или} \quad (\alpha+2)(\alpha-3)=0,$$

и, следовательно, имеет два различных корня:

$$\alpha_1=-2 \quad \text{и} \quad \alpha_2=3.$$

Но тогда (см. Утверждение 1)

$$a_n=b_1(\alpha_1)^{n-1}+b_2(\alpha_2)^{n-1}=b_1(-2)^{n-1}+b_2(3)^{n-1}.$$

Полагая n = 1 и 2, из этой формулы получим, что

$$a_1=b_1+b_2 \quad \text{и} \quad a_2=-2b_1+3b_2.$$

Откуда, учитывая, что $a_1=3$ и $a_2=14$, получим, что

$$b_1+b_2=3 \quad \text{и} \quad -2b_1+3b_2=14.$$

Решая полученную систему из двух линейных уравнений (см. Разделы 2.3.2 и 2.4.1), найдем, что

$$b_1=-1 \quad \text{и} \quad b_2=4.$$

Таким образом, формула для a_n имеет следующий вид

$$a_n=-(-2)^{n-1}+4(3)^{n-1}.$$

Проверка. Учитывая, что $a_1=3$ и $a_2=14$, с помощью заданного рекуррентного соотношения $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ найдем, что исследуемая числовая последовательность имеет вид

$$\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} = 3,\ 14,\ 32,\ 116,\ 308,\ \ldots\ .$$

Подсчитаем теперь значение пятого элемента последовательности $\{a_n\}$ с помощью полученной формулы: $a_5=-(-2)^4+4(3)^4=-16+324=308$. Проверка закончена.

ii) Если для последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ = 3, 14, 32, 116, 308, … характеристическое уравнение имеет вид

$$(\alpha+2)(\alpha-3)=0,$$

то (см. Утверждение 2 в Разделе 2.7.1) для последовательности $\{S_n\}_{n=1,2,\ldots}=\{\sum_{j=1}^{n}a_j\}_{n=1,2,\ldots}$ = 3, 17, 49, 165, 473, … характеристическое уравнение имеет вид

$$(\alpha+2)(\alpha-3)(\alpha-1)=0$$

и, следовательно, имеет три различных корня:

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=-2 \quad \text{и} \quad \alpha_3=3.$$

Но тогда (см. Утверждение 1)

$S_n = b_1(\alpha_1)^{n-1} + b_2(\alpha_2)^{n-1} + b_3(\alpha_3)^{n-1} = b_1 + b_2(-2)^{n-1} + b_3(3)^{n-1}$,

то есть в обсуждаемом случае формула для S_n получается из формулы для a_n {см. пункт (i)} добавлением константы b_1.

Полагая n = 1, 2 и 3, из этой формулы получим, что

$$S_1 = b_1 + b_2 + b_3,\ S_2 = b_1 - 2b_2 + 3b_3 \text{ и } S_3 = b_1 + 4b_2 + 9b_3.$$

Откуда, учитывая, что $S_1 = 3$, $S_2 = 17$ и $S_3 = 49$, получим, что

$$b_1 + b_2 + b_3 = 3,\ b_1 - 2b_2 + 3b_3 = 17 \text{ и } b_1 + 4b_2 + 9b_3 = 49.$$

3-е уравнение системы сложим со 2-м уравнением, умноженным на 2, 2-е уравнение — с 1-м уравнением, умноженным на 2. В результате получим систему из 2-х уравнений:

$$3b_1 + 15b_3 = 83 \text{ и } 3b_1 + 5b_3 = 23.$$

Решая полученную систему из двух линейных уравнений, найдем, что

$$b_3 = 6 \text{ и } b_1 = -7/3.$$

Значение b_2 определим из уравнения $b_1 + b_2 + b_3 = 3$: $b_2 = -2/3$.

Таким образом, формула для S_n имеет следующий вид

$$S_n = -7/3 - (2/3)\times(-2)^{n-1} + 6\times(3)^{n-1}.$$

Проверка. Подсчитаем значение пятого элемента последовательности $\{S_n\}_{n=1,2,\ldots}$ = 3, 17, 49, 165, 473, … с помощью полученной формулы:

$$S_5 = -7/3 - (2/3)\times(-2)^4 + 6\times(3)^4 = -7/3 - 32/3 + 486 = 473.$$

Проверка закончена.

П р и м е р 2. Известно, что

i) для иррационального числа $\alpha = \sqrt{7}$ рациональные приближения имеют вид $\{r_n\}_{n=0,1,2,\ldots} = \{a_n / m_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$, где $\{a_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ = (1, 2, 3, 5, 8, 37, 45, 82, 127, …), $\{m_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ = (0, 1, 1, 2, 3, 14, 17, 31, 48, …) и для указанных числовых последовательностей справедливы рекуррентные соотношения $a_{n+8} = 16a_{n+4} - a_n$ и m_{n+8} = $16m_{n+4} - m_n$ (см. Пример 2 в Разделе 2.7.2);

ii) если числа каждой из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{m_n\}$, указанных в пункте (i), разделить на ***четыре*** группы: содержащие соответственно числа с номерами $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$, $n = 4k + 3$ и $n = 4k + 4$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, то (см. Пример 2 в Разделе 2.7.3) для восьми указанных числовых последовательностей характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^3 - 255\alpha + 16 = 0$$

и это уравнение имеет три различных корня:

$$\alpha_1 = 8 + 3\sqrt{7},\quad \alpha_2 = 8 - 3\sqrt{7},\quad \alpha_3 = -16 .$$

Но тогда (см. Утверждение 1)

$$a_{4k+t} = b_1^{(t)}(\alpha_1)^k + b_2^{(t)}(\alpha_2)^k + b_3^{(t)}(\alpha_3)^k$$

и, соответственно,

$$m_{4k+t} = c_1^{(t)}(\alpha_1)^k + c_2^{(t)}(\alpha_2)^k + c_3^{(t)}(\alpha_3)^k ,$$

где, $t = 1,2,3,4$ и $k = 0,1,2,\ldots$.

Как показывают расчеты, при $t = 1,2,3,4$ $b_3^{(t)} = 0$ и $c_3^{(t)} = 0$, а коэффициенты $b_1^{(t)}$, $b_2^{(t)}$, $c_1^{(t)}$ и $c_2^{(t)}$ имеют следующие значения:

	$b_1^{(t)}$	$b_2^{(t)}$	$c_1^{(t)}$	$c_2^{(t)}$
$t = 1$	$4+3\sqrt{7}/2$	$4-3\sqrt{7}/2$	$\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$
$t = 2$	$1+\sqrt{7}/2$	$1-\sqrt{7}/2$	$1/2+\sqrt{7}/7$	$1/2-\sqrt{7}/7$
$t = 3$	$3/2+\sqrt{7}/2$	$3/2-\sqrt{7}/2$	$1/2+3\sqrt{7}/14$	$1/2-3\sqrt{7}/14$
$t = 4$	$5/2+\sqrt{7}$	$5/2-\sqrt{7}$	$1+5\sqrt{7}/14$	$1-5\sqrt{7}/14$

Б. Предположим, что характеристическое уравнение (см. Разделы 2.7.1 и 2.7.3) имеет всего один (действительный или мнимый) корень α_1 кратности *k*, то есть имеет вид

$$(\alpha - \alpha_1)^k = 0 .$$

Докажем, что в обсуждаемом случае

аналитическая формула для n-го члена последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *имеет вид*

$$a_n = Q_{k-1}(n)(\alpha_1)^{n-1} ,$$

где $Q_{k-1}(n)=h_0+h_1n+\ldots+h_{k-1}n^{k-1}$ *— многочлен от n степени не выше* $k-1$ *с коэффициентами* $h_0,h_1,\ldots,h_{k-1}$ (***Утверждение* 2**).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

i) Используя формулу разложения бинома Ньютона (см. Раздел 1.1.7), запишем характеристическое уравнение $(\alpha-\alpha_1)^k=0$ в следующем виде

$$C(k,0)\alpha^k-C(k,1)\alpha_1\alpha^{k-1}+C(k,2)\alpha_1{}^2\alpha^{k-2}-\ldots+$$
$$(-1)^{k-1}C(k,k-1)\alpha_1{}^{k-1}\alpha+(-1)^kC(k,k)\alpha_1{}^k=0.$$

Откуда получим, что для последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ выполняется рекуррентное соотношение

$$a_{n+k}=C(k,1)\alpha_1a_{n+k-1}-C(k,2)\alpha_1{}^2a_{n+k-2}+\ldots-$$
$$(-1)^{k-1}C(k,k-1)\alpha_1{}^{k-1}a_{n+1}-(-1)^kC(k,k)\alpha_1{}^ka_n.$$

Заменив в этом соотношении все a_l на $Q_{k-1}(l)(\alpha_1)^{l-1}$ $(l=n+k,$ $n+k-1,\ldots,n$, $Q_{k-1}(l)=h_0+h_1l+\ldots+h_{k-1}l^{k-1})$ (см. Утверждение 2) получим, что

$$Q_{k-1}(n+k)C(k,0)-Q_{k-1}(n+k-1)C(k,1)+Q_{k-1}(n+k-2)C(k,2)-$$
$$\ldots+Q_{k-1}(n+1)(-1)^{k-1}C(k,k-1)+Q_{k-1}(n)(-1)^kC(k,k)=0. \quad (D_1)$$

Доказательство справедливости соотношения (D_1) получим в пункте (iv) как следствие некоторых фактов, доказанных далее в пунктах (ii) – (iii). Доказательство справедливости Утверждения 2 завершим в пункте (v).

ii) Используя метод математической индукции (см. Раздел 1.1.3), ***докажем***, что при $m=0,1,\ldots,k-1$ справедливо равенство

$$k^mC(k,k)-(k-1)^mC(k,k-1)+\ldots+(-1)^\mu(k-\mu)^mC(k,k-\mu)+\ldots+$$
$$(-1)^k0^mC(k,0)=0. \quad (D_2)$$

а) При m = 0 формула (D_2) превращается в справедливое равенство

$$C(k,k)-C(k,k-1)+\ldots+(-1)^\mu C(k,k-\mu)+\ldots+(-1)^kC(k,0)=0 \quad (D_3)$$

(см. в Разделе 1.1.7 свойство (д) биномиальных коэффициентов).

б) Предположим, что формула (D_2) справедлива при всех $m \le j$ и $j \le k-2$. *Докажем*, что эта формула справедлива и при $m = j + 1$.

Определим многочлен $P_{j+1}(x)$ степени $j + 1$

$$P_{j+1}(x) = (x-j)(x-j+1)\dots(x-1)x = x^{j+1} - \beta_j x^j - \dots - \beta_1 x$$

и заметим, что из выписанного соотношения следует, что

$$\beta_j x^j + \dots + \beta_1 x = x^{j+1} - P_{j+1}(x). \qquad (D_4)$$

Умножая формулы (D_2) при $m = 1, 2, \dots, j$ соответственно на числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j$ и складывая их, получим

$$\left(\beta_1 k + \dots + \beta_j k^j\right) C(k,k) - \left(\beta_1 (k-1) + \dots + \beta_j (k-1)^j\right) C(k,k-1) + \dots +$$
$$(-1)^\mu \left(\beta_1 (k-\mu) + \dots + \beta_j (k-\mu)^j\right) C(k,k-\mu) + \dots +$$
$$(-1)^k \left(\beta_1 \times 0 + \dots + \beta_j \times 0^j\right) C(k,0) = 0.$$

Откуда, учитывая соотношение (D_4), получим

$$\left(k^{j+1} - P_{j+1}(k)\right) C(k,k) - \left((k-1)^{j+1} - P_{j+1}(k-1)\right) C(k,k-1) + \dots +$$
$$(-1)^\mu \left((k-\mu)^{j+1} - P_{j+1}(k-\mu)\right) C(k,k-\mu) + \dots +$$
$$(-1)^k \left(0^{j+1} - P_{j+1}(0)\right) C(k,0) = 0$$

или

$$k^{j+1} C(k,k) - (k-1)^{j+1} C(k,k-1) + \dots + (-1)^k 0^{j+1} C(k,0) =$$
$$P_{j+1}(k) C(k,k) - P_{j+1}(k-1) C(k,k-1) + \dots + (-1)^k P_{j+1}(0) C(k,0). \quad (D_5)$$

Так как левая часть в соотношении (D_5) совпадает с левой частью формулы (D_2) при $m = j + 1$, приходим к выводу, что для завершения доказательства справедливости формулы (D_2) ***достаточно доказать***, что

$$P_{j+1}(k) C(k,k) - P_{j+1}(k-1) C(k,k-1) + \dots +$$
$$(-1)^k P_{j+1}(0) C(k,0) = 0. \quad (D_6)$$

Заменив в равенстве (D_3) k на $k - m$, получим

$$C(k-m, k-m) - \dots + (-1)^\mu C(k-m, k-m-\mu) + \dots +$$
$$(-1)^{k-m} C(k-m, 0) = 0 \qquad (D_7)$$

(очевидно, что в равенстве (D_7), m может принимать значения 0, 1, …, $k-1$ и $0 \le \mu \le k-m$).

Помножив в равенстве (D_7) каждое слагаемое на $k(k-1)\ldots(k-m+1)$ и учтя соотношение

$$k(k-1)\ldots(k-m+1)C(k-m,k-m-\mu) = (k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu)C(k,k-\mu)$$

{см. в Разделе 1.1.7 свойство (в) биномиальных коэффициентов}, получим, что

$$(k-m+1)\ldots k\,C(k,k) - \ldots + (-1)^{\mu}(k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu)\,C(k,k-\mu) + \ldots + (-1)^{k-m} \times 1 \times 2 \times \ldots \times m\,C(k-m,0) = 0\,.$$

Осталось заметить, что при $m = j + 1$ последнее равенство совпадает с соотношением (D_6). Таким образом, доказательство справедливости формулы (D_2) закончено.

iii) ***Докажем***, что соотношение (D_6) справедливо для произвольного многочлена $P_{k-1}(x)$ степени не выше $k-1$.

Пусть многочлен $P_{k-1}(x)$ имеет вид

$$P_{k-1}(x) = A_{k-1}x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots + A_0\,.$$

Умножая формулы (D_2) при $m = 0,1,\ldots,k-1$ соответственно на числа $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ и складывая их, получим

$$\left(A_0 + A_1 k + \ldots + A_{k-1}k^{k-1}\right)C(k,k) - \left(A_0 + A_1(k-1) + \ldots + A_{k-1}(k-1)^{k-1}\right)C(k,k-1) + \ldots + (-1)^k\left(A_0 + A_1 \times 0 + \ldots + A_{k-1} \times 0^{k-1}\right)C(k,0) = 0$$

или

$$P_{k-1}(k)C(k,k) - P_{k-1}(k-1)C(k,k-1) + \ldots + (-1)^k P_{k-1}(0)C(k,0) = 0 \qquad (D_8)$$

(что и требовалось доказать).

iv) Для доказательства справедливости формулы (D_1) {см. пункт (i)} осталось заметить, что указанная формула является частным случаем формулы (D_8): для получения формулы (D_1) достаточно в многочлене $P_{k-1}(x)$ аргумент x заменить на $x + n$, где n — произвольное натуральное число.

v) Полагая в аналитической формуле (см. Утверждение 2)

$$a_n = Q_{k-1}(n)(\alpha_1)^{n-1} = (h_0 + h_1 n + \ldots + h_{k-1} n^{k-1})(\alpha_1)^{n-1} =$$
$$\left(A_0 + A_1(n-1) + \ldots + A_{k-1}(n-1)^{k-1}\right)(\alpha_1)^{n-1} = P_{k-1}(n-1)(\alpha_1)^{n-1}$$

$n = 1,2,\ldots,k$, получим систему из k линейных уравнений:

$$\begin{array}{lll}
A_0 + A_1 \times 0 & + \ldots + A_{k-1} \times 0 & = a_1 \\
A_0 + A_1 \times 1 & + \ldots + A_{k-1} \times 1^{k-1} & = a_2 / \alpha_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
A_0 + A_1 \times (k-1) & + \ldots + A_{k-1} \times (k-1)^{k-1} & = a_k / (\alpha_1)^{k-1}
\end{array}$$

Так как последовательность $\{Q_{k-1}(n)(\alpha_1)^{n-1}\}_{n=1,2,\ldots}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению, для которого характеристическое уравнение имеет вид $(\alpha - \alpha_1)^k = 0$ {см. пункты (i) – (iv)}, очевидно, что Утверждение 2 верно, если полученная система уравнений позволяет единственным образом определить значения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$. Но для этого достаточно (см. Раздел 2.5), чтобы однородная система уравнений

$$\begin{array}{lll}
A_0 + A_1 \times 0 & + \ldots + A_{k-1} \times 0 & = 0 \\
A_0 + A_1 \times 1 & + \ldots + A_{k-1} \times 1^{k-1} & = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
A_0 + A_1 \times (k-1) & + \ldots + A_{k-1} \times (k-1)^{k-1} & = 0
\end{array}$$

имела только нулевое решение.

Для *доказательства* того, что последнее условие выполнено, достаточно заметить, что уравнения однородной системы означают, что

$$P_{k-1}(0) = P_{k-1}(1) = \ldots = P_{k-1}(k-1) = 0,$$

то есть, что уравнение

$$h_0 + h_1 x + \ldots + h_{k-1} x^{k-1} = 0$$

степени не выше k – 1 имеет k различных корней: $0,1,\ldots,k-1$ (что противоречит основной теореме алгебры).

Доказательство справедливости Утверждения 2 закончено.

Следствие из доказанного Утверждения 2 и Утверждения 2, приведенного в Разделе 2.7.1:

если для рекуррентной последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ *характеристическое уравнение имеет вид* $(\alpha-1)^k=0$, *то аналитические формулы для n-ых членов последовательностей* $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ и $\{S_n\}_{n=1,2,\dots}=\{\sum_{j=1}^n a_j\}_{n=1,2,\dots}$ *имеют вид*

$$a_n=Q_{k-1}(n) \text{ и } S_n=P_k(n),$$

где $Q_{k-1}(n)$ и $P_k(n)$ *— некоторые многочлены от n степени не выше соответственно* $k-1$ и *k*.

П р и м е р 3. Пусть $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}=\{n^2+cn+d\}_{n=1,2,\dots}$.

Очевидно, что для рассматриваемого случая

$$a_n=(n^2+cn+d)(1)^{n-1}$$

и, значит (см. Утверждение 2), для рекуррентной последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}=\{n^2+cn+d\}_{n=1,2,\dots}$ характеристическое уравнение имеет вид

$$(\alpha-1)^3=0\ .$$

Но тогда (см. Следствие из Утверждения 2) для последовательности

$$\{S_n\}_{n=1,2,\dots}=\{\textstyle\sum_{i=1}^n(i^2+ci+d)\}_{n=1,2,\dots}=$$

$$1+c+d,\ 5+3c+2d,\ 14+6c+3d,\ 30+10c+4d,\ 55+15c+5d,\ \dots$$

аналитическая формула для ее *n*-го члена S_n имеет вид

$$S_n=P_3(n)=b_0+b_1n+b_2n^2+b_3n^3.$$

Полагая в формуле для S_n $n=4,3,2,1$, получим систему из 4-х линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
b_0+4b_1+16b_2+64b_3&=30+10c+4d\ ,\\
b_0+3b_1+9b_2+27b_3&=14+6c+3d\ ,\\
b_0+2b_1+4b_2+8b_3&=5+3c+2d\ ,\\
b_0+b_1+b_2+b_3&=1+c+d\ .
\end{aligned}$$

Из 1-го уравнения системы вычтем 2-е уравнение, из 2-го — 3-е, из 3-го — 4-е. В результате получим систему из 3-х уравнений:

$$b_1 + 7b_2 + 37b_3 = 16 + 4c + d\ ,$$
$$b_1 + 5b_2 + 19b_3 = 9 + 3c + d\ ,$$
$$b_1 + 3b_2 + 7b_3 = 4 + 2c + d\ .$$

Из 1-го уравнения новой системы вычтем 2-е уравнение, из 2-го — 3-е, из 3-го — 4-е. В результате получим систему из 2-х уравнений:

$$2b_2 + 18b_3 = 7 + c\,,$$
$$2b_2 + 12b_3 = 5 + c\,.$$

Из последней системы имеем $b_3 = 1/3,\ \ b_2 = 1/2 + c/2$. Из последнего уравнения предыдущей системы найдем, что $b_1 = 1/6 + \alpha/2 + d$. Наконец, из уравнения $b_0 + b_1 + b_2 + b_3 = 1 + c + d$ найдем, что $b_0 = 0$. Таким образом получаем, что

$$S_n = n(1 + 3c + 6d + (3 + 3c)n + 2n^2)/6 = n(n+1)(2n+1)/6 + cn(n+1)/2 + dn.$$

Обратим внимание, что так как

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(i^2 + ci + d) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + c\sum_{i=1}^{n} i + d\sum_{j=1}^{n} 1\,,$$

в качестве дополнительного результата проведенных расчетов имеем следующие две формулы

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$

(описание еще одного метода, с помощью которого можно получить эти две формулы, см. в Разделе 1.1.4).

В. ***В общем случае*** (см. Утверждения 1 и 2, приведенные в пунктах А и Б),

если для последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ *выполняется рекуррентное соотношение*

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + c_0 a_n\,,$$

то аналитическая формула для n-го члена последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ *имеет вид*

$$a_n = \sum_{j=1}^{l} Q^{(j)}_{d_j - 1}(n)(\alpha_j)^{n-1},$$

где $Q^{(j)}_{d_j-1}(n) = h^{(j)}_0 + h^{(j)}_1 n + \ldots + h^{(j)}_{d_j-1} n^{d_j-1}$ *— многочлен от n степени не выше* $d_j - 1$ *с коэффициентами* $h^{(j)}_0, h^{(j)}_1, \ldots, h^{(j)}_{d_j-1}$, $\{\alpha_j\}_{j=1,2,\ldots,l}$ *— множество (действительных и/или мнимых) корней кратности* d_j *для характеристического уравнения*

$$\alpha^k - c_{k-1}\alpha^{k-1} - c_{k-2}\alpha^{k-2} - \ldots - c_1\alpha - c_0 = 0$$

и $\sum_{j=1}^{l} d_j = k$ (***Утверждение*** **3**).

П р и м е р 4. Известно (см. Пример 1 в Разделе 2.7.2), что для числовой последовательности $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, …) рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+6} = a_{n+5} + a_{n+4} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n$. Требуется найти формулу для a_n.

Для рассматриваемого случая (см. Пример 1 в Разделе 2.7.3) характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^6 - \alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^2 + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)(\alpha^3 - 1) = 0 .$$

или

$$(\alpha - 1)^3(\alpha + 1)(\alpha + 1/2 - i\sqrt{3}/2)(\alpha + 1/2 + i\sqrt{3}/2) = 0 .$$

Отсюда получаем, что характеристическое уравнение имеет четыре различных корня:

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} .$$

При этом кратность корня α_1 равна 3, а кратность корней $\alpha_{2,3,4}$ равна 1.

Так как в общей формуле для a_n корни α_l возводятся в степень n – 1, представим комплексные корни $\alpha_{3,4}$ в тригонометрической форме (см. Раздел 1.5):

$$\alpha_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2 = -(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)) ,$$

$$\alpha_4 = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = -(\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)) .$$

Теперь легко выписать аналитическую формулу для a_n:

$$a_n = h_0 + h_1 n + h_2 n^2 + (-1)^n \left\{ h_3 + h_4 \cos\frac{\pi(n-1)}{3} + h_5 \sin\frac{\pi(n-1)}{3} \right\},$$

которая свой окончательный вид примет после определения значений коэффициентов $h_0, h_1, \ldots, h_5$ и последующего упрощения полученного выражения:

$$a_n = \frac{47}{72} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} + (-1)^n \left\{ \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\cos\frac{\pi(n-1)}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\sin\frac{\pi(n-1)}{3} \right\} =$$

$$= \frac{47}{72} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} + (-1)^n \left\{ \frac{1}{8} + \frac{2}{9}\cos\frac{\pi n}{3} \right\}.$$

Напомним, что в обозначениях, которые использовались в Разделе 1.1.7,

$$a_n = \mathrm{P}(n, 3),$$

а формула для a_n, полученная с использованием рекуррентного соотношения

$$\mathrm{P}(n, k) = \mathrm{P}(n - k, k) + \mathrm{P}(n - k, k - 1),$$

имеет вид

$$a_n^* = \mathrm{P}(n, 3) = \mathrm{P}(6j + l, 3) = 3j^2 + (l-3)j + [(6-l)/6],$$

где $n = 6j + l$, $l = 0, 1, ..., 5$, $j = 1, 2, ...$, а квадратные скобки означают целую часть (например, [2] = 2, [3,7] = 3). Учитывая, что $j = [n/6]$, а $l = n \bmod 6$ (см. Раздел 1.2.5), последнюю формулу можно представить в виде

$$a_n^* = 3[n/6]^2 + \big((n \bmod 6) - 3\big)[n/6] + [\big(6 - (n \bmod 6)\big)/6].$$

Отметим, что в обоих вариантах формулы для a_n можно выделить ***полиномиальную*** часть Q. При этом Q имеет наиболее простой вид для формулы, полученной с использованием общей теории рекуррентных соотношений:

$$a_n = Q(n) + R(n),$$

где

$$Q(n) = 47/72 - n/2 + n^2/12, \ R(n) = (-1)^n\{1/8 + (2/9)\cos(\pi n/3)\}.$$

Так как $|R(n)| < 0{,}5$ для любого значения n, получаем, что формулу для a_n можно представить в следующем виде

$$a_n = g_+\big(Q(n)\big),$$

где $g_+(y)$ — функция “ближайшее целое к y”.

Продемонстрируем, что формула $a_n = g_+\bigl(Q(n)\bigr)$ позволяет ввести ***неопределенность*** в исследуемую последовательность $\{a_n\}$.

Действительно, если $g_+(y)$ — функция “ближайшее целое к y”, $-0{,}5 < \xi_n < 0{,}5$ и $\{b_n\}$ — последовательность натуральных чисел, то $\{b_n\} = \{g_+(b_n + \xi_n)\}$. Поэтому вместо исследования начальной последовательности $\{b_n\}$ можно проводить исследование последовательностей $\{b_n + \xi_n\}$.

Используя указанный способ, легко получить, что формула для a_n = P(n, 3) с неопределенностью имеет вид

$$a_n(\xi) = (8{,}5 + 2{,}5\xi - 6n + n^2)/12$$

где $-1 < \xi < 1$. Из анализа этой формулы получим, что для элементов последовательностей $\{a_n(\xi)\}_{n=1,2,\ldots}$ выполняются рекуррентные соотношения порядка 3:

$$a_{n+3}(\xi) = 3a_{n+2}(\xi) - 3a_{n+1}(\xi) + a_n(\xi).$$

Очевидно, что переход от последовательностей $\{a_n(\xi)\}_{n=1,2,\ldots}$ к последовательностям $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} = \{\mathrm{P}(n,3)\}_{n=1,2,\ldots}$ осуществляется при помощи соотношения

$$\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \ = \ \{g_+\bigl(a_n(\xi)\bigr)\}_{n=1,2,\ldots}.$$

Добавим, что при m = 4, 5, 6, 7 для последовательностей $\{\mathrm{P}(n,m)\}_{n=1,2,\ldots}$ указанными способами легко получить следующие результаты:

i) При m = 4 справедливо рекуррентное соотношение порядка k = m(m+1)/2 = 10:

$$a_{n+10} = a_{n+9} + a_{n+8} - 2a_{n+5} - a_{n+2} - a_{n+1} + a_n.$$

Из этого соотношения получим, что характеристическое уравнение и аналитическая формула для a_n = P(n, 4) имеют соответственно вид

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)(\alpha^3 - 1)(\alpha^4 - 1) = 0,$$

$$a_n = -175/288 + 135n/288 - 15n^2/144 + n^3/144 +$$
$$(1/8)\sin\big((\pi/2)(n-1)\big) +$$
$$(-1)^n\{-5/32 + n/32 + \big(2/(9\sqrt{3})\big)\sin\big((\pi/3)(n-2)\big)\}.$$

Аналитическая формула с неопределенностью для a_n = P(n, 4) выглядит следующим образом

$$a_n(\xi) = (-96{,}5 + 23{,}5\xi + 67{,}5n - 15n^2 + n^3)/144 + (-1)^n(4{,}5n/144),$$

где $-1 < \xi < 1$. Из анализа этой формулы получим, что для элементов последовательностей $\{a_n(\xi)\}_{n=1,2,\ldots}$ выполняются рекуррентные соотношения порядка 6:

$$a_{n+6}(\xi) = 2a_{n+5}(\xi) + a_{n+4}(\xi) - 4a_{n+3}(\xi) + a_{n+2}(\xi) +$$
$$2a_{n+1}(\xi) - a_n(\xi).$$

ii) При m = 5 справедливо рекуррентное соотношение порядка $k = m(m+1)/2 = 15$:

$$a_{n+15} = a_{n+14} + a_{n+13} - a_{n+10} - a_{n+9} - a_{n+8} + a_{n+7} + a_{n+6} + a_{n+5} -$$
$$a_{n+2} - a_{n+1} + a_n.$$

Из этого соотношения получим, что характеристическое уравнение и аналитическая формула для a_n = P(n, 5) имеют соответственно вид

$$(\alpha-1)(\alpha^2-1)(\alpha^3-1)(\alpha^4-1)(\alpha^5-1) = 0,$$

$$a_n = 50651/86400 + (-1275n + 310n^2 - 30n^3 + n^4)/2880 +$$
$$(1/16)\cos\big((\pi/2)n\big) - (1/16)\sin\big((\pi/2)n\big) +$$
$$(2/25)\cos\big((2\pi/5)n\big) +$$
$$(-1)^n\{15/128 - n/64 + (2/27)\cos\big((\pi/3)n\big) +$$
$$+ (2/25)\cos\big((\pi/5)n\big)\}.$$

Аналитическая формула с неопределенностью для a_n = P(n, 5) выглядит следующим образом

$$a_n(\xi) = (1755 + 631\xi - 1275n + 310n^2 - 30n^3 + n^4)/2880 -$$
$$(-1)^n(45n/2880),$$

где $-1<\xi<1$. Из анализа этой формулы получим, что для элементов последовательностей $\{a_n(\xi)\}_{n=1,2,\ldots}$ выполняются рекуррентные соотношения порядка 7:

$$a_{n+7}(\xi)=3a_{n+6}(\xi)-a_{n+5}(\xi)-5a_{n+4}(\xi)+5a_{n+3}(\xi)+a_{n+2}(\xi)-3a_{n+1}(\xi)+a_n(\xi)\,.$$

iii) При m = 6 справедливо рекуррентное соотношение порядка $k = m(m+1)/2 = 21$:

$$a_{n+21}=a_{n+20}+a_{n+19}-a_{n+16}-2a_{n+14}+a_{n+12}+a_{n+11}+a_{n+10}+a_{n+9}-2a_{n+7}-a_{n+5}+a_{n+2}+a_{n+1}-a_n\,.$$

Аналитическая формула с неопределенностью для a_n = P(n, 6) выглядит следующим образом

$$a_n(\xi)=\frac{-373+84\xi}{576}+\frac{43981n}{103680}-\frac{122{,}5n^2}{1152}+\frac{77n^3}{6480}-\frac{7n^4}{11520}+\frac{n^5}{86400}+(-1)^n\left(\frac{472{,}5n}{17280}-\frac{1{,}5n^2}{1152}\right)+\frac{n}{81}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right),$$

где $-1<\xi<1$. Из анализа этой формулы получим, что для элементов последовательностей $\{a_n(\xi)\}_{n=1,2,\ldots}$ выполняются рекуррентные соотношения порядка 13:

$$a_{n+13}(\xi)=a_{n+12}(\xi)+3a_{n+11}(\xi)-a_{n+10}(\xi)-5a_{n+9}(\xi)-3a_{n+8}(\xi)+6a_{n+7}(\xi)+6a_{n+6}(\xi)-3a_{n+5}(\xi)-5a_{n+4}(\xi)-a_{n+3}(\xi)+3a_{n+2}(\xi)+a_{n+1}(\xi)-a_n(\xi)\,.$$

iv) При m = 7 справедливо рекуррентное соотношение порядка $k = m(m+1)/2 = 28$:

$$a_{n+28}=a_{n+27}+a_{n+26}-a_{n+23}-a_{n+21}-a_{n+20}+a_{n+18}+a_{n+17}+2a_{n+16}-2a_{n+12}-a_{n+11}-a_{n+10}+a_{n+8}+a_{n+7}+a_{n+5}-a_{n+2}-a_{n+1}+a_n\,.$$

Аналитическая формула с неопределенностью для a_n = P(n, 7) выглядит следующим образом ($-1<\xi<1$)

$$a_n(\xi)=\frac{130+29\xi}{200}-\frac{21343\,n}{51840}+\frac{3991n^2}{38400}-\frac{161n^3}{12960}+\frac{79n^4}{103680}-\frac{n^5}{43200}+\frac{n^6}{3628800}-(-1)^n\left(\frac{945n}{51840}-\frac{n^2}{1536}\right)-\frac{\sqrt{3}n}{243}\sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right).$$

2.7.5. Исследование задач о рекуррентных последовательностях, входящих в состав психологических тестов

Как указано в книге «Проверьте свои способности» (Г. Айзенк; СПб.: Лань, 1995), задачи о рекуррентных последовательностях включают в психологические тесты для того, чтобы исследовать специфические способности человека. При этом задачи могут быть изложены ***двумя*** способами.

Первый способ состоит в том, что дается задание и предъявляются несколько решений, из которых все кроме одного являются ложными. ***Второй*** способ состоит в том, что решение задачи испытуемый должен найти самостоятельно.

В качестве ***примера*** тестовой задачи, изложенной первым способом, рассмотрим следующее задание из широко известного теста Р. Кеттел, применяемого для определения коэффициента интеллектуальности человека:

Укажите, какое число 10, 5 *или* 7 *должно находиться на месте знака вопроса в последовательности чисел*

$$\begin{array}{lcccccc} n\ldots. & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ a_n\ldots & 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & ? \end{array}$$

В этой задаче ***правильным*** ответом считается число 10. Основанием служит то, что обсуждаемая последовательность содержит два ряда чисел: 1, 1+2 = 3, 3+2 = 5, 5+2 = 7, 7+2 = 9, … и 2, 2+4 = 6, 6+4 = 10, 10+4 = 14, … .

Используя методы общей теории рекуррентных соотношений, изложенные в Разделе 2.7.2, продемонстрируем, что

на месте знака вопроса, указанного в условии задачи, может стоять ***любое*** *из чисел* 10, 5 *или* 7.

Действительно

i) набор чисел 1, 2, 3, 6, 5 не является рекуррентной последовательностью первого порядка, так как эти числа не образуют геометрической прогрессии;

ii) Если набор чисел 1, 2, 3, 6, 5 является рекуррентной последовательностью второго порядка, то справедливо уравнение

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_0 a_n \,.$$

Полагая в указанном уравнении $n = 1,2$, получим

$$\begin{cases} a_1 c_0 + a_2 c_1 = a_3 \\ a_2 c_0 + a_3 c_1 = a_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 + 2c_1 = 3 \\ 2c_0 + 3c_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_0 + 4c_1 = 6 \\ 2c_0 + 3c_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_0 = 3 \end{cases}.$$

Рекуррентное уравнение $a_{n+2} = 3a_n$ дает набор чисел 1, 2, 3, 6, 9, ..., который, очевидно, не совпадает с исходной числовой последовательностью. Таким образом, набор чисел 1, 2, 3, 6, 5 не является рекуррентной последовательностью второго порядка;

iii) Если набор чисел 1, 2, 3, 6, 5 является рекуррентной последовательностью третьего порядка, то справедливо уравнение

$$a_{n+3} = c_2 a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_0 a_n .$$

Так как для подсчета значений коэффициентов этого уравнения необходимо, чтобы исходная числовая последовательность содержала не менее шести чисел, запишем исходную последовательность в виде

$$1, 2, 3, 6, 5, m.$$

Решая соответствующую систему уравнений, найдем, что обсуждаемый набор чисел образует рекуррентную последовательность порядка 3:

$$a_{n+3} = \frac{18 - m}{4} a_{n+2} + 7a_{n+1} - \frac{86 - 3m}{4} a_n .$$

Доказательство закончено.

Легко также найти, что обсуждаемая последовательность чисел 1, 2, 3, 6, 5, 10, 7, 14, 9, ... является рекуррентной последовательностью порядка 4

$$a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$$

и, следовательно, эта числовая последовательность полностью определяется заданием значений ее первых 8-и чисел. Таким образом, для устранения выявленной неопределенности ответа достаточно в условии обсуждаемой задачи привести первые восемь чисел последовательности 1, 2, 3, 6, 5, 10, 7, 14, 9, ... При этом формулировка исправленного варианта задачи может выглядеть, например, следующим образом:

Укажите, какое число 14, 9 *или* 13 *должно находиться на месте знака вопроса в последовательности чисел*

n ….	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n …	1	2	3	6	5	10	7	14	?

Примеры тестовых задач, изложенных вторым способом (см. ранее), можно найти в цитированной книге Г. Айзенк. В частности, таковыми являются все приводимые далее 16 заданий, входящие в состав Числового теста Г. Айзенк под номерами, указанными в скобках рядом с порядковым номером задачи.

Для каждой из исследуемых задач 1 – 16 далее приводится несколько ответов. Ответ 1 всегда содержит способ решения задачи, предлагаемый Г. Айзенк. Ответы 2 и 3 содержат некоторые альтернативные решения. Если хотя бы одно из решений, приводимых в ответах 1, 2, 3, отличается от других, то указывается новая формулировка задачи, позволяющая устранить неопределенность ответа. Если в ответе 1 рекуррентное соотношение приводится в круглых скобках, то это означает, что оно добавлено к решению Г. Айзенк автором данной работы.

1(1). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	18	20	24	32	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + 2^n$ и $a_5 = 32 + 2^4 = 48$.

Ответ 2: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ и $a_5 = 3\times 32 - 2\times 24 = 48$.

2(3). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	212	179	146	113	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n - 33$ и $a_5 =$ 113 – 33 = 80.

Ответ 2: $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ и $a_5 = 2\times 113 - 146 = 80$.

3(5). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5	6	7
a_n …	6	8	10	11	14	14	?

Ответ 1: Последовательность содержит два ряда чисел:
6, 6 + 4 = 10, 10 + 4 = 14, 14 + 4 = 18, … и
8, 8 + 3 = 11, 11 + 3 = 14, 14 + 3 = 17, …
и $a_7 = 18$ (рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$).

Ответ 2: $a_{n+3} = (-8a_{n+2} + 50a_{n+1} - 13a_n)/22$ и

$$a_7 = (-8 \times 14 + 50 \times 14 - 13 \times 11)/22 = 20\frac{5}{22}.$$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n ….	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n …	6	8	10	11	14	14	18	17	?

4(8). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	7	13	24	45	?

Ответ 1: $a_{n+1} = 2a_n - n$ и $a_5 = 2 \times 45 - 4 = 86$ (рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+3} = 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n$).

Ответ 2: $a_{n+2} = -3a_{n+1} + 9a_n$ и $a_5 = -3 \times 45 + 9 \times 24 = 81$.

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n ….	1	2	3	4	5	6	7
a_n …	7	13	24	45	86	167	?

5(10). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5	6
a_n …	4	5	7	11	19	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$ и $a_6 = 19 + 2^4 = 35$.

Ответ 2: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ и $a_6 = 3 \times 19 - 2 \times 11 = 35$.

6(12). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5	6
a_n …	6	7	9	13	21	?

Ответ 1: $a_{n+1} = 2a_n - 5$ и $a_6 = 2 \times 21 - 5 = 37$.

Ответ 2: $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$ и $a_6 = 21 + 2^4 = 37$.

Ответ 3: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ и $a_6 = 3 \times 21 - 2 \times 13 = 37$.

7(14). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5	6
a_n …	64	48	40	36	34	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n - 2^{5-n}$ и $a_6 = 34 - 1 = 33$.

Ответ 2: $a_{n+2} = (3a_{n+1} - a_n)/2$ и $a_6 = (3 \times 34 - 36)/2 = 33$.

8(17). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5	6	7
a_n …	15	13	12	11	9	9	?

Ответ 1: Последовательность содержит два ряда чисел:
15, 15 – 3 = 12, 12 – 3 = 9, 9 – 3 = 6, … и
13, 13 – 2 = 11, 11 – 2 = 9, 9 – 2 = 7, …
и $a_7 = 6$ (рекуррентное соотношение имеет вид
$a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$).

Ответ 2: $a_{n+3} = (-7a_{n+2} - 3a_{n+1} + 17a_n)/12$ и

$$a_7 = (-7 \times 9 - 3 \times 9 + 17 \times 11)/12 = 8\frac{1}{12}.$$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n ….	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n …	15	13	12	11	9	9	6	7	?

9(19). *Вставьте пропущенное число*

n ….	1	2	3	4	5	6
a_n …	11	12	14	?	26	42

Ответ 1: $a_{n+1} = 2a_n - 10$ и $a_4 = 2\times 14 - 10 = 18$.

Ответ 2: $a_{n+1} = a_n + 2^{n-1}$ и $a_4 = 14 + 2^2 = 18$.

Ответ 3: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ и $a_4 = 3\times 14 - 2\times 12 = 18$.

10(29). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	172	84	40	18	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n / 2 - 2$ и $a_5 = 18/2 - 2 = 7$.

Ответ 2: $a_{n+2} = (3a_{n+1} - a_n)/2$ и $a_5 = (3\times 18 - 40)/2 = 7$.

11(30). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	1	5	13	29	?

Ответ 1: $a_{n+2} = a_{n+1} + 2(a_{n+1} - a_n) = 3a_{n+1} - 2a_n$ и
$a_5 = 3\times 29 - 2\times 13 = 61$.

Ответ 2: $a_{n+1} = a_n + 2^{n+1}$ и $a_5 = 29 + 2^5 = 61$.

12(33). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	0	3	8	15	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ и $a_5 = 15 + 2\times 4 + 1 = 24$.

Ответ 2: $a_n = n^2 - 1$ и $a_5 = 25 - 1 = 24$; рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$.

Ответ 3: $a_{n+2} = (24a_{n+1} - 19a_n)/9$ и $a_5 = (24\times15 - 19\times8)/9 = 23\frac{1}{9}$.

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n ….	1	2	3	4	5	6	7
a_n …	0	3	8	15	24	35	?

13(37). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n …	4	7	9	11	14	15	19	?

Ответ 1: Последовательность содержит два ряда чисел:
4, 4 + 5 = 9, 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19, … и
7, 7 + 4 = 11, 11 + 4 = 15, 15 + 4 = 19, …
и $a_8 = 19$ (рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+4} = 2a_{n+2} - a_n$).

Ответ 2: $a_{n+4} = (19a_{n+3} + 75a_{n+2} - 114a_{n+1} + 10a_n)/9$ и
$a_8 = (19\times19 + 75\times15 - 114\times14 + 10\times11)/9 = 0$.

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n ….	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n …	4	7	9	11	14	15	19	19	?

14(45). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	857	969	745	1193	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + (-2)^{n-1}\times112$ и $a_5 = 1193 - 2^3\times112 = 297$.

Ответ 2: $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ и $a_5 = -1193 + 2\times745 = 297$.

15(48). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	7	19	37	61	?

Ответ 1: $a_{n+1} = a_n + 6(n+1)$ и $a_5 = 61 + 6 \times 5 = 91$.

Ответ 2: $a_n = 3n(n+1) + 1$ и $a_5 = 3 \times 5 \times 6 + 1 = 91$; рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$.

Ответ 3: $a_{n+2} = (46a_{n+1} - 35a_n)/17$ и

$$a_5 = (46 \times 61 - 35 \times 37)/17 = 88\frac{15}{17}$$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n ….	1	2	3	4	5	6	7
a_n …	7	19	37	61	91	127	?

16(49). *Продолжите числовой ряд*

n ….	1	2	3	4	5
a_n …	5	41	149	329	?

Ответ 1: $a_n = 36(n-1)^2 + 5$ и $a_5 = 36 \times 16 + 5 = 581$ (рекуррентное соотношение имеет вид $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$).

Ответ 2: $a_{n+2} = (62a_{n+1} - 121a_n)/13$ и

$$a_5 = (62 \times 329 - 121 \times 149)/13 = 182\frac{3}{13}.$$

Для устранения выявленной неопределенности ответа формулировку задачи ***необходимо изменить*** следующим образом:

Продолжите числовой ряд

n ….	1	2	3	4	5	6	7
a_n …	5	41	149	329	581	905	?