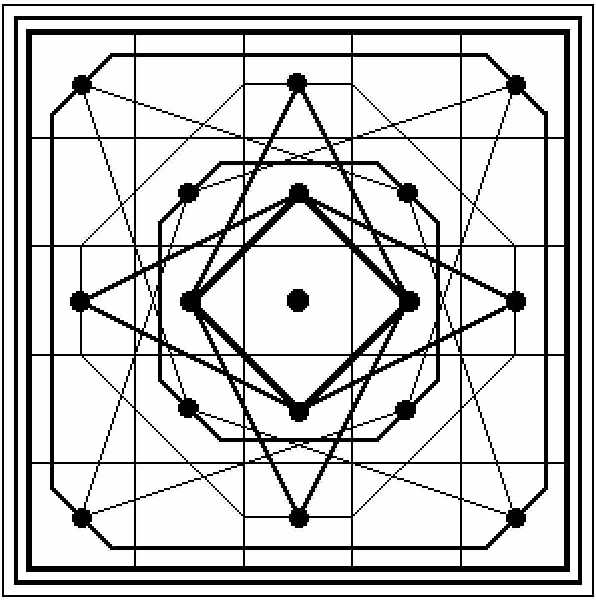
Лекции по Математике. Вып. ТММ-1

Ю. В. Чебраков

ТЕОРИЯ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ



Санкт-Петербург, 2010

УДК 511+512
ББК 22
Ч345

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор С.-Петерб. техн. ун-та
М. А. Салль
Кандидат физико-математических наук,
доцент ин-та истории естествознания и техники РАН
Л. И. Брылевская

Чебраков Ю. В.

Ч345 Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во «ВВМ», 2010. – 280 с. – (Лекции по Математике. Вып. ТММ-1.)

ISBN 978–5–9651–0357–7

Данная книга является *первым выпуском* курса лекций, посвященных изложению современного варианта *теории магических матриц* (ТММ). В ней излагаются развитый автором функционально-алгебраический подход к решению различных комбинаторных задач о классических и нетрадиционных магических матрицах (в частности, о классических и нетрадиционных магических квадратах) и основные понятия и методы теории чисел, комбинаторного анализа, теории линейных уравнений и теории матриц, которые наиболее активно используются в ТММ.

Текст лекций написан простым понятным языком, содержит не только теоретический материал, но и описание разнообразных вычислительных алгоритмов и математических методов решения задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: от студентов вузов и университетов до преподавателей и научных сотрудников.

УДК 511+512
ББК 22

ISBN 978–5–9651–0357–7

Глава 3. Магические матрицы $n \times n$ ($n > 3$) из простых чисел

Бог дал нам орехи, но он не будет их колоть.
И.В. Гете

3.1. Магические матрицы 4×4 из простых чисел

3.1.1. Общий вид магической матрицы 4×4 и ее свойства

Найдем общий вид ***магической*** матрицы $A = A_{4\times4}$ {то есть матрицы размера 4×4, у которой одинакова сумма элементов, расположенных в строках, столбцах и обеих диагоналях (см. Раздел 2.2.1)} и укажем некоторые ее свойства.

По условию задачи для элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

имеем 10 уравнений:

Строки:	Столбцы:
1. $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} = S,$	5. $a_{11} + a_{21} + a_{31} + a_{41} = S,$
2. $a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} = S,$	6. $a_{12} + a_{22} + a_{32} + a_{42} = S,$
3. $a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} = S,$	7. $a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} = S,$
4. $a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} = S,$	8. $a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{44} = S,$

Диагонали:

9. $a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = S,$ 10. $a_{41} + a_{32} + a_{23} + a_{14} = S,$

где S — (магическая) постоянная матрицы.

Решая указанную систему уравнений (см. пункт А в Разделе 2.6.1), найдем общий вид

а) искомой матрицы A_S $\{S = a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44}\}$:

$$A_S = \begin{pmatrix} a_{42}+a_{43}+a_{44}-a_{21}-a_{31} & a_{41}+a_{43}+a_{44}-a_{22}-a_{32} & a_{22}-a_{32}-a_{43} & a_{21}+a_{31}-a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{42}+a_{43}+2a_{44}-a_{21}-a_{31}-a_{32} & a_{42}+a_{43}+a_{44}-a_{21}-a_{31} \\ a_{31} & a_{32} & a_{21}+a_{31}+a_{41}-a_{22}-a_{44} & a_{31}+a_{32}+a_{41}-a_{22}-a_{44} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

б) (***вспомогательной***) матрицы D_S {помогающей понять закон, которому подчиняются элементы матрицы A_S }:

$$D_S = \begin{pmatrix} A+w & A+a & A+c & A+d \\ B & B+a+w & B+c & B+d \\ C & C+a & C+c-w & C+d \\ D & D+a & D+c & D+d-w \end{pmatrix},$$

в) матрицы A_S, содержащей параметры A, B, C, D, a, c, d, w $\{S = A+B+C+D+a+c+d\}$:

$$A_S = \begin{pmatrix} A+c & B & C+d & D+a \\ D+d-w & C+a & B+c & A+w \\ B+a+w & A+d & D & C+c-w \\ C & D+c & A+a & B+d \end{pmatrix}.$$

У т в е р ж д е н и е 1. *Если* $A = A_S$, *то*

а) *для элементов матрицы A справедливы следующие* (***дополнительные***) *соотношения*:

11. $a_{11}+a_{14}+a_{41}+a_{44} = S,$
12. $a_{22}+a_{23}+a_{32}+a_{33} = S,$
13. $a_{21}+a_{24}+a_{31}+a_{34} = S,$
14. $a_{12}+a_{13}+a_{42}+a_{43} = S,$

где S — (магическая) постоянная матрицы.

б) *матрицу A можно представить в виде суммы двух диагональных латинских матриц* 4×4 *и магической матрицы*

4×4, *у которой отличны от нуля только элементы* $a_{21} = -w, a_{24} = w, a_{31} = w, a_{34} = -w$.

Доказательство. Справедливость пунктов (а) и (б) Утверждения 1 следует из устройства матрицы A_S:

$$A_S = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & d & a \\ d & a & c & 0 \\ a & d & 0 & c \\ 0 & c & a & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & +w \\ +w & 0 & 0 & -w \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, из устройства матриц A_S и/или D_S следует, что в том случае, когда

а) параметр $w = 0$, задача о построении магических матриц 4×4 из простых чисел сводится в основном к поиску наборов из 16-и различных простых чисел вида $\{p_1 + \alpha_i, p_2 + \alpha_i, p_3 + \alpha_i, p_4 + \alpha_i\}$, где $i = 1, 2, 3, 4$, $\alpha_1 = 0$, а α_2, α_3 и α_4 — некоторые целые числа;

б) параметр $w \neq 0$ (то есть имеет место общий случай), использование матриц A_S и/или D_S для решения задачи о построении магических матриц 4×4 из простых чисел становится малоэффективным (например, по сравнению с алгоритмом, изложенным в Разделе 3.1.2).

3.1.2. Алгоритм построения магических матриц 4×4 из заданного набора 16-и простых чисел

В данном разделе рассмотрим общий алгоритм решения задачи о построении магических матриц 4×4 из заданного набора 16-и простых чисел, в котором не используется матрица A_S. Для иллюстрации с помощью этого алгоритма построим магическую матрицу 4×4 из следующего набора 16-и простых чисел:

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47, 53, 71.

<u>Описание алгоритма</u>:

1. Подсчитав сумму всех 16-и чисел заданного набора и разделив ее на 4, получим значение магической постоянной S

будущей магической матрицы 4×4. Если S — нечетное число, то из заданного набора 16-и чисел нельзя построить магической матрицы 4×4 {для 16-и указанных ранее простых чисел S = 408/4 = 102}.

№	Магическая строка	№	Магическая строка	№	Магическая строка
1	1, 7, 23, 71;	16	3, 17, 29, 53;	31	7, 17, 31, 47;
2	1, 11, 19, 71;	17	3, 11, 41, 47;	32	7, 19, 29, 47;
3	1, 13, 17, 71;	18	3, 23, 29, 47;	33	7, 17, 37, 41;
4	1, 7, 41, 53;	19	5, 7, 19, 71;	34	7, 23, 31, 41;
5	1, 11, 37, 53;	20	5, 7, 37, 53;	35	11, 13, 31, 47;
6	1, 17, 31, 53;	21	5, 13, 31, 53;	36	11, 13, 37, 41;
7	1, 19, 29, 53;	22	5, 13, 37, 47;	37	11, 19, 31, 41;
8	1, 13, 41, 47;	23	5, 19, 31, 41;	38	11, 23, 31, 37;
9	1, 17, 37, 47;	24	5, 19, 37, 41;	39	13, 17, 19, 53;
10	1, 23, 31, 47;	25	5, 29, 31, 37;	40	13, 19, 23, 47;
11	1, 23, 37, 41;	26	7, 11, 13, 71;	41	13, 17, 31, 41;
12	1, 29, 31, 41;	27	7, 11, 31, 53;	42	13, 19, 29, 41;
13	3, 5, 23, 71;	28	7, 13, 29, 53;	43	13, 23, 29, 37;
14	3, 11, 17, 71;	29	7, 19, 23, 53;	44	17, 19, 29, 37;
15	3, 5, 41, 53;	30	7, 11, 37, 47;	45	19, 23, 29, 31.

(1)

1	23	31	47
3	17	29	53
5	19	37	41
7	11	13	71

(2)

1	11	37	53
3	5	23	71
7	19	29	47
13	17	31	41

(3)

3	53	17	29
71	11	13	7
5	37	41	19
23	1	31	47

(4)

Рис. 23. Построение магической матрицы 4×4 (4) из заданного набора 16-и простых чисел.

2. Найдем все возможные разбиения числа S на 4 различных слагаемых, каждое из которых принадлежит заданному набору чисел (см. описания “генераторов разбиений” в конце Раздела 1.1.7) {все подходящие для разбираемого примера разбиения числа S = 102 на четыре различных слагаемых показаны на Рис. 23(1)}. Если количество найденных разбиений меньше 14-и (см. в Разделе 3.1.1 десять соотноше-

ний, определяющих магическую матрицу $A = A_{4\times4}$, и четыре дополнительных соотношения для элементов этой матрицы, указанных в Утверждении 1), то из заданного набора 16-и простых чисел нельзя построить магической матрицы 4×4.

3. Пользуясь списком разбиений, сформируем все возможные различные наборы по четыре магические строки, содержащие в совокупности 16 чисел заданного набора. Если количество таких наборов меньше 2-х, то из заданного набора 16-и чисел нельзя построить магической матрицы 4×4 (для разбираемого примера из 45-и исходных магических строк можно образовать 51 набор по четыре магические строки).
4. Среди найденных наборов по 4 строки выявим такие пары наборов, которые удовлетворяют следующему условию:

   в каждой строке одного набора присутствует по одному числу из различных строк другого набора.

   Если таких пар не найдено, то из заданного набора 16-и чисел нельзя построить магической матрицы 4×4 {для разбираемого примера существует всего одна такая пара, которая приведена на Рис. 23(2, 3)}.
5. Среди пар наборов из пункта 4 пригодны для построения магических матриц 4×4 только те, для которых среди найденного ранее списка магических строк (разбиений числа S) удастся найти хотя бы две строки, обладающие следующими свойствами

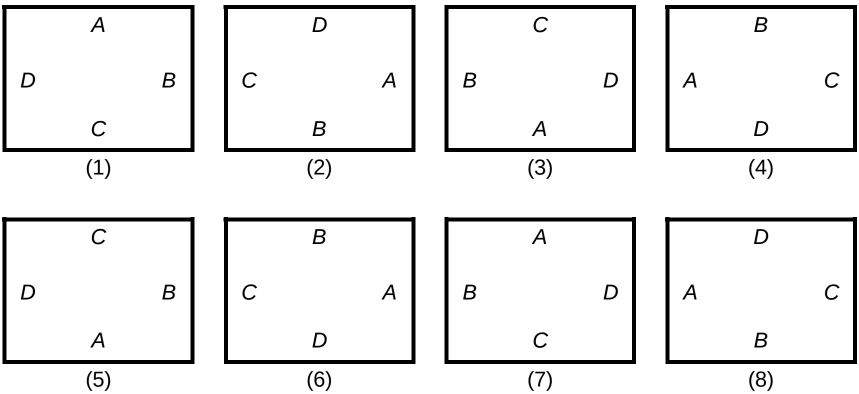
   – *эти строки не содержат одинаковых чисел*;
   – *в каждой строке присутствует по одному числу из различных строк как первого, так и второго набора пары*

   {для пары, показанной на Рис. 23(2, 3), такие два набора ищутся однозначно: (3, 11, 41, 47) и (13, 23, 29, 37) }.

При построении магических матриц 4×4 из найденных заготовок (пар наборов по четыре строки и соответствующих этим парам наборов пар строк) следует иметь в виду, что

i) пара наборов по четыре строки дает набор магических строк и столбцов для магической матрицы 4×4, а найденные пары строк используются для образования диагоналей магической матрицы;

ii) с помощью поворотов на 90 градусов и отражений относительно сторон из любой магической матрицы можно получить еще семь новых {см. Рис. 24(1 – 8)}. Так как различная пространственная ориентация не затрагивает внутреннего устройства магической матрицы, то при изучении семейства магических матриц, построенных из одного и того же набора элементов, в нем обычно оставляют только те матрицы, которые невозможно получить друг из друга поворотами и отражениями. О таком семействе магических матриц говорят, что оно ***задано с точностью до поворотов и отражений***;



1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(9 – M_1)

1	3	2	4
9	11	10	12
5	7	6	8
13	15	14	16

(10 – M_2)

6	5	8	7
2	1	4	3
14	13	16	15
10	9	12	11

(11 – M_3)

6	8	5	7
14	16	13	15
2	4	1	3
10	12	9	11

(12 – M_4)

Рис. 24. Инвариантные преобразования магической матрицы 4×4.

iii) при $n \geq 4$ существуют ***М-преобразования*** любой магической матрицы $n \times n$ (перестановки ее строк и столбцов, оставляющие без изменения «диагональные» разбиения *S*), с помощью которых из одной магической матрицы можно получить заданный с точностью до поворотов и отражений набор из $[n/2]\cdot\{(2[n/2]-2)!!\}$ различных магических матриц {подробности см. во втором выпуске данных лекций}, где символ $a!!$ означает произведение всех натуральных чисел, которые, во-первых, не превосходят a и, во-вторых, совпадают с ним по четности (например, $6!! = 2\cdot4\cdot6 = 48$, $7!! = 1\cdot3\cdot5\cdot7 = 105$), а символ $[x]$ — целая часть от x (см. определение этого символа в Примере 2 Раздела 1.3.1).

Очевидно, что при изучении магических матриц, построенных из одного и того же набора элементов, имеет смысл рассматривать только те матрицы, которые невозможно получить друг из друга поворотами, отражениями и М-преобразованиями. О таком семействе магических матриц говорят, что оно ***задано с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований***.

Если клетки любой исходной магической матрицы 4×4 ***нумеровать в лексикографическом порядке*** $\{a_{11}\to 1, a_{12}\to 2,\ldots, a_{43}\to 15, a_{44}\to 16\}$, а под М-преобразованиями понимать определенные перестановки его клеток, то в этом случае для $n = 4$ все $[4/2]\times\{(2[4/2]-2)!!\} = 4$ М-преобразования можно представить в виде четырех таблиц: ***M_1-преобразование***, которое не меняет вида исходной магической матрицы {то есть M_1-преобразование совпадает с матрицей 4×4, содержащей номера клеток исходной магической матрицы}, и ***M_2-, M_3-, M_4-преобразования*** {см. Рис. 24(9 – 12)}.

Легко доказать, что

для построения магических матриц 4×4 *с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований, достаточно чтобы каждая различная пара строк, найденная в пункте* 5 *алгоритма, использовалась для построения только одной магической матрицы* 4×4

{таким образом, с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований для обсуждаемого набора из 16-и простых чисел существует всего одна магическая матрица 4×4 (см. Рис. 23(4))}.

В последующих 3-х разделах обсудим несколько простых способов построения различных примеров магических матриц

4×4, содержащих в своих клетках только простые числа. С точки зрения алгебры в основу всех описываемых далее способов положена одна и та же идея:

пожертвовав общностью ради простоты решения указанных задач, строить такие алгебраические формулы магических матриц 4×4, *которые имели бы небольшое число произвольно задаваемых параметров и простой закон, существующий между элементами магической матрицы*.

3.1.3. Метод построения магических матриц 4×4, содержащих 9 простых чисел магической матрицы 3×3

В Разделе 2.6.4 рассмотрена задача о построении из простых чисел магических матриц 3-го порядка. Продемонстрируем, что

для построения из простых чисел магических матриц 4×4 *можно использовать девять простых чисел, находящихся в клетках магических матриц* 3*-го порядка*.

Действительно, на Рис. 25(1) показана символьная вспомогательная матрица размером 4×4. Будем считать, что нумерация клеток этой вспомогательной матрицы производится в лексикографическом порядке {то есть так, как это показано на Рис. 25(3)}.

a	$a + b$	$a + 2b$	$a + 3b + d$
$a + c$	$a + c + b$	$a + c + 2b$	$a + c + 3b + d$
$a + 2c$	$a + 2c + b$	$a + 2c + 2b$	$a + 2c + 3b + d$
$a + 3c + d$	$a + 3c + b + d$	$a + 3c + 2b + d$	$a + 3c + 3b + 2d$

(1)

1	7	13	79
31	37	43	109
61	67	73	139
151	157	163	229

(2)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

(3)

3	5	12	14
16	10	7	1
6	4	13	11
9	15	2	8

(4)

Рис. 25. Метод построения магических матриц 4×4, содержащих 9 простых чисел магической матрицы 3×3.

Легко проверить, что, переставив клетки вспомогательной матрицы 25(1) (вместе с содержащимися в них символами) так, как этого требует Рис. 25(4), получим символьную магическую матрицу 4-го порядка.

Если в левом верхнем углу вспомогательной матрицы 25(1) выделить таблицу 3×3, то выделенная таблица есть не что иное, как вспомогательная матрица D_S магической матрицы 3×3 (см. Раздел 2.6.1). Таким образом, для того чтобы 16 клеток матрицы 25(1) содержали простые числа, достаточно

i) подставить в таблицу 25(1) девять простых чисел, из которых можно составить магическую матрицу 3-го порядка;

ii) так подобрать значение параметра *d*, чтобы простыми стали и остальные 7 чисел матрицы 25(1), находящиеся в ее нижней строке и крайнем правом столбце

{например, положив в матрице 25(1) $a = 1$, $b = 6$, $c = 30$ и $d = 60$, получим числовую матрицу 25(2) из простых чисел, в левом верхнем углу которой находится представленная в виде вспомогательной таблицы наименьшая магическая матрица 3×3 из простых чисел}.

3.1.4. Методы построения магических матриц 4×4 из сумм классических и символьных матриц

В данном разделе для построения из простых чисел магических матриц 4×4 предлагается использовать различные алгебраические формулы и/или вспомогательные матрицы, построенные из сумм классических и символьных матриц 4×4.

А. Укажем два простых способа построения всех возможных ***классических*** матриц 4×4 (то есть магических матриц 4×4, построенных из последовательных целых чисел от 1 до 16).

Способ 1. Запишем ***формулу*** для разложения целого числа *N* на 5 слагаемых:

$$N = 8k + 4l + 2m + p + 1,$$

где параметры k, l, m и p могут принимать только два значения: 0 или 1.

Пользуясь указанной формулой, составим Таблицу 6, устанавливающую взаимно однозначное соответствие между числами от 1 до 16 и их разложениями на k-, l-, m-, p-компоненты. Всякую классическую матрицу 4-го порядка с помощью установленного соответствия можно однозначно разложить на 4 таблицы (***k*-, *l*-, *m*-, *p*-компоненты**), каждая из которых содержит 8 символов одного вида и 8 символов другого вида.

Таблица 6. Взаимно однозначное соответствие между числами от 1 до 16 и их разложениями на k-, l-, m-, p-компоненты.

N	k		l		m		p		N	k		l		m		p	
1	k_1	0	l_1	0	m_1	0	p_1	0	9	k_2	1	l_1	0	m_1	0	p_1	0
2	k_1	0	l_1	0	m_1	0	p_2	1	10	k_2	1	l_1	0	m_1	0	p_2	1
3	k_1	0	l_1	0	m_2	1	p_1	0	11	k_2	1	l_1	0	m_2	1	p_1	0
4	k_1	0	l_1	0	m_2	1	p_2	1	12	k_2	1	l_1	0	m_2	1	p_2	1
5	k_1	0	l_2	1	m_1	0	p_1	0	13	k_2	1	l_2	1	m_1	0	p_1	0
6	k_1	0	l_2	1	m_1	0	p_2	1	14	k_2	1	l_2	1	m_1	0	p_2	1
7	k_1	0	l_2	1	m_2	1	p_1	0	15	k_2	1	l_2	1	m_2	1	p_1	0
8	k_1	0	l_2	1	m_2	1	p_2	1	16	k_2	1	l_2	1	m_2	1	p_2	1

Будем проводить ***классификацию*** классических матриц 4×4 по внешнему виду их таблиц разложения. При этом выделим три группы матриц:

а) ***правильные*** матрицы — все 4 таблицы их разложения сами являются магическими матрицами, то есть во всех строках, столбцах и двух главных диагоналях находятся по 2 символа одного и другого вида;

б) ***регулярные*** матрицы — хотя бы одна из 4-х таблиц разложения является регулярной, то есть в ее строках и столбцах содержится по 2 символа одного и другого вида, но нарушено это условие на главной диагонали. Остальные 3 таблицы могут быть как магическими, так и регулярными;

в) ***нерегулярные*** матрицы — хотя бы одна из 4-х таблиц разложения является нерегулярной, то есть в этой таблице существует по крайней мере одна строка или один столбец, где количество символов одного вида отлично от двух. Остальные 3 таблицы могут быть как магическими, так и регулярными или нерегулярными.

a_1	p_1	a_1	p_1
p_1	a_1	p_1	a_1
p_1	a_1	p_1	a_1
a_1	p_1	a_1	p_1

(1) – A_1

a_2	a_2	p_2	p_2
p_2	p_2	a_2	a_2
p_2	p_2	a_2	a_2
a_2	a_2	p_2	p_2

(2) – A_2

a_3	a_3	p_3	p_3
p_3	p_3	a_3	a_3
a_3	a_3	p_3	p_3
p_3	p_3	a_3	a_3

(3) – A_3

a_4	p_4	a_4	p_4
p_4	p_4	a_4	a_4
a_4	a_4	p_4	p_4
p_4	a_4	p_4	a_4

(4) – A_4

a_5	p_5	p_5	a_5
p_5	a_5	a_5	p_5
a_5	p_5	p_5	a_5
p_5	a_5	a_5	p_5

(5) – A_5

a_6	p_6	p_6	a_6
a_6	p_6	p_6	a_6
p_6	a_6	a_6	p_6
p_6	a_6	a_6	p_6

(6) – A_6

a_7	p_7	a_7	p_7
a_7	p_7	a_7	p_7
p_7	a_7	p_7	a_7
p_7	a_7	p_7	a_7

(7) – A_7

a_8	a_8	p_8	p_8
a_8	p_8	a_8	p_8
p_8	a_8	p_8	a_8
p_8	p_8	a_8	a_8

(8) – A_8

c_1	c_1	t_1	t_1
c_1	c_1	t_1	t_1
t_1	t_1	c_1	c_1
t_1	t_1	c_1	c_1

(9) – C_1

c_2	t_2	c_2	t_2
c_2	c_2	t_2	t_2
t_2	t_2	c_2	c_2
t_2	c_2	t_2	c_2

(10) – C_2

c_3	t_3	c_3	t_3
t_3	c_3	t_3	c_3
c_3	t_3	c_3	t_3
t_3	c_3	t_3	c_3

(11) – C_3

c_4	c_4	t_4	t_4
t_4	c_4	t_4	c_4
c_4	t_4	c_4	t_4
t_4	t_4	c_4	c_4

(12) – C_4

b_1	h_1	h_1	b_1
h_1	b_1	h_1	b_1
b_1	h_1	b_1	h_1
h_1	b_1	b_1	h_1

(13) – B_1

b_2	h_2	h_2	b_2
b_2	h_2	b_2	h_2
h_2	b_2	h_2	b_2
h_2	b_2	b_2	h_2

(14) – B_2

b_3	h_3	b_3	h_3
h_3	b_3	b_3	h_3
b_3	h_3	h_3	b_3
h_3	b_3	h_3	b_3

(15) – B_3

b_4	h_4	b_4	h_4
b_4	h_4	h_4	b_4
h_4	b_4	b_4	h_4
h_4	b_4	h_4	b_4

(16) – B_4

b_5	b_5	h_5	h_5
h_5	b_5	b_5	h_5
b_5	h_5	h_5	b_5
h_5	h_5	b_5	b_5

(17) – B_5

b_6	b_6	h_6	h_6
b_6	h_6	h_6	b_6
h_6	b_6	b_6	h_6
h_6	h_6	b_6	b_6

(18) – B_6

Рис. 26. Список A-, B-, C- форм, пригодных для конструирования классических матриц 4×4.

В публикациях (*Ермаков В.П.* Полные волшебные квадраты. Средние волшебные квадраты с шестнадцатью клетками. Правильные волшебные квадраты с шестнадцатью клетками // Вестник опытной физики и элементарной математики. Киев. 1885 – 1886; *Fitting, F.* Rein mathematische Behandlung des Problems der magischen Quadrate von 16 und 64 Feldern / Jahresbericht d. Deutschen Mathem.–Vereinigung. Leipzig. 1931. P .177–193.)

а) указано, что из двух разных символов можно построить всего 8 различных магических матриц 4×4 {все они показаны на Рис. 26(1 – 8)};

б) перечислены те комбинации из этих 8-и матриц по 4, в которых после наложения друг на друга всех их 4-х компонент получаются магические матрицы, содержащие в своих клетках 16 различных символов:

1.	$A_1\,A_2\,A_5\,A_6$,	4.	$A_1\,A_2\,A_3\,A_5$,	(8.	$A_1\,A_5\,A_6\,A_7$),
2.	$A_1\,A_3\,A_5\,A_7$,	5.	$A_1\,A_2\,A_6\,A_7$,	(9.	$A_2\,A_3\,A_5\,A_6$),
3.	$A_2\,A_3\,A_6\,A_7$,	6.	$A_3\,A_5\,A_6\,A_7$,	(10.	$A_1\,A_2\,A_3\,A_7$),
		7.	$A_4\,A_5\,A_6\,A_8$,	(11.	$A_1\,A_2\,A_4\,A_8$).

Назовем эти комбинации ***алгебраическими*** или ***k,l,m,p-формулами правильных магических матриц***.

С точностью до поворотов и отражений различными из них будут только 7.

Действительно, как легко проверить, операции поворота на 180 градусов и отражения не меняют внешнего вида ни одной из матриц 26(1 – 8) и, следовательно, не меняют внешнего вида ни одной из указанных выше 11-и формул. Что же касается поворота на 90 градусов, то с помощью этой операции из матриц 26(1 – 3) можно получить, соответственно, матрицы 26(5 – 7), а из матриц 26(5 – 7) — матрицы 26(1 – 3). По этой причине операция поворота на 90 градусов позволяет из алгебраических формул 4, 5, 6, 7 получить, соответственно, формулы 8, 9, 10, 11.

Выбрав в качестве ***основных*** алгебраические формулы 1 – 7, объясним, как с помощью этих формул можно построить все правильные магические матрицы из чисел от 1 до 16 и/или подсчитать их количество.

Так как каждая компонента в любой алгебраической формуле может быть *k*-, *l*-, *m*- или *p*-компонентой, то существует 4! = 24 возможности получить магическую матрицу для каждой формулы. Кроме этого в каждой из 4-х компонент можно менять местами 0 и 1, благодаря чему число этих возможностей увеличивается в $2^4=16$ раз. Отсюда количество классических (магических) матриц, которые можно получить с помощью любой из алгебраических формул 1 – 7, равно 16·24 = 384.

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

(1) – $A_1A_2A_5A_6$

1	14	4	15
12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10

(2) – $A_1A_3A_5A_7$

1	4	14	15
13	16	2	3
12	9	7	6
8	5	11	10

(3) – $A_2A_3A_6A_7$

1	4	14	15
16	13	3	2
11	10	8	5
6	7	9	12

(4)–$A_1A_2A_3A_5$

1	15	4	14
6	12	7	9
16	2	13	3
11	5	10	8

(5)–$A_1A_2A_6A_7$

1	14	15	4
11	8	5	10
6	9	12	7
16	3	2	13

(6)–$A_3A_5A_6A_7$

1	14	15	4
10	8	5	11
7	9	12	6
16	3	2	13

(7)–$A_4A_5A_6A_8$

Рис. 27. Примеры классических матриц 4×4 для *k,l,m,p*-формул вида *АААА*.

Если проводить подсчет с точностью до поворотов и отражений, то каждая из алгебраических формул 1 – 3 дает 384/8 = 48 матриц, а формулы 4 – 7 — 384/4 = 96 матриц.

Таким образом, с точностью до поворотов и отражений из алгебраических формул 1 – 7 можно получить 3·48 + 4·96 = 528 различных классических матриц 4-го порядка.

Очевидно, что

в качестве компактной формы представления всех существующих правильных классических матриц 4×4 *можно использовать не только полную таблицу алгебраических формул вида АААА, но и список правильных классических матриц, в котором содержится по одному произвольно выбранному для каждой k,l,m,p-формулы экземпляру классической матрицы.*

Список правильных классических матриц 4×4, с помощью которого можно восстановить полную таблицу k,l,m,p-формул вида *AAAA*, представлен на Рис. 27.

Таблицы из двух символов, пригодные для построения регулярных классических матриц 4×4, будем называть ***A***-, ***B***- и ***C*-*формами***, если в одной из их диагоналей находятся соответственно 2, 3 и 4 символа одного вида.

В указанной ранее публикации (Fitting, 1931)

а) доказано, что при разложении регулярной магической матрицы из чисел от 1 до 16 могут встретиться только такие числовые матрицы разложения, у которых две из четырех клеток {см. Рис. 25(3)} 1, 4, 16, 13, или 6, 7, 11, 10, или 2, 3, 15, 14, или 5, 8, 12, 9 заняты символом одного вида, а две другие — символом другого вида;

б) найдено, что условию из пункта (а) удовлетворяют 8 различных *A*-форм {см. Рис. 26(1 – 8)}, 4 различные *C*-формы {см. Рис. 26(9 – 12)} и 16 различных *B*-форм (отметим, что все 16 *B*-форм с помощью поворотов, отражений и М-преобразований можно получить всего лишь из одной B_1-формы, показанной на Рис. 26(13) {определение М-преобразований см. в Разделе 3.1.2}).

б) перечислены все четверки вида *BCAA*, *BCAB* и *BCBB*, в которых после наложения друг на друга всех их 4-х компонент получаются магические матрицы, содержащие в своих клетках 16 различных символов:

BCAA — $B_1C_1A_2A_3$, $B_1C_2A_1A_4$;

BCBA — $B_1C_1B_2A_2$, $B_1C_1B_3A_2$, $B_1C_1B_3A_3$, $B_1C_1B_4A_3$,
$B_1C_2B_2A_1$, $B_1C_2B_5A_4$, $B_1C_2B_6A_4$;

BCBB — $B_1C_1B_2B_3$, $B_1C_1B_2B_4$, $B_1C_1B_3B_4$, $B_1C_2B_2B_5$,
$B_1C_2B_2B_6$, $B_1C_2B_5B_6$.

Назовем 15 перечисленных комбинаций ***алгебраическими*** или ***k,l,m,p-формулами регулярных магических матриц***. Объясним, как с помощью этих формул можно построить (с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований) все регулярные магические матрицы из чисел от 1 до 16 и/или подсчитать их количество.

Магические матрицы вида ВСАА. Как следует из приведенного выше списка, существуют две алгебраические формулы такого вида.

Очевидно, что в каждой формуле для B_1-формы имеется двойной выбор расстановок чисел 0 и 1. Оба эти варианта показаны на Рис. 28(1, 2). Легко выяснить, что матрицу 28(2) можно получить из матрицы 28(1) посредством поворота на 180 градусов и последующего отражения. А так как существует договоренность подсчитывать количество регулярных классических матриц с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований, для правильного подсчета необходимо выбрать какую-либо одну расстановку нулей и единиц в B_1-форме. Выберем ту, которая показана на Рис. 28(1).

1	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0

(1) – B_1

0	1	1	0
1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1

(2) – B_1'

0	0	1	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	0

(3) – C_1

0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0

(4) – C_2

1	0	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0

(5) – B_2

0	1	0	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0

(6) – B_3

0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0

(7) – B_4

0	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
1	1	0	0

(8) – B_5

0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

(9) – B_6

Рис. 28. Возможные расстановки нулей и единиц в *B*- и *C*-формах регулярных классических матриц 4×4.

В каждой из двух формул вида *ВСАА* *С*-форма может быть *l*-, *m*- или *p*-компонентой. При этом из-за указанной выше фиксации расстановок нулей и единиц в B_1-форме независимо от того, является ли *С*-форма *l*-, *m*- или *p*-компонентой, в магических матрицах *ВСАА* *С*-форма может иметь только такой вид, как показано на Рис. 28(3, 4) {другими словами, фиксация расстановок нулей и единиц в B_1-форме приводит в алгебраических формулах вида *BCAA* к фиксации расстановок нулей и единиц в *C*-форме}.

Учтем теперь, что в каждой формуле имеется возможность поменять местами *A*-формы, а в каждой *A*-форме существует двойной выбор расстановок нулей и единиц, что приводит к увеличению числа классических (магических) матриц в $2!\cdot 2^2 = 8$ раз. В итоге получаем, что с учетом поворотов, отражений и М-преобразований общее количество классических матриц этой группы подсчитывается так: $2\cdot 3\cdot 8 = 48$.

Магические матрицы вида BCBA. Существует семь алгебраических формул указанного вида. Для каждой формулы *C*-форма может быть либо *m*-, либо *p*-компонентой магической матрицы. При этом во всех разложениях классической матрицы *C*-формы и $B_2 – B_6$-формы могут иметь только вид, показанный на Рис. 28(3 – 9) {то есть в данном случае фиксация расстановок нулей и единиц в B_1-форме приводит к фиксации расстановок нулей и единиц как в *C*-формах, так и в $B_2 – B_6$-формах}.

Если учесть теперь, что в *A*-форме существует двойной выбор расстановок нулей и единиц, то с учетом поворотов, отражений и М–преобразований для этой группы существует $7\cdot 2\cdot 2 = 28$ различных классических матриц.

Магические матрицы вида BCBB. Во всех шести формулах этого вида *C*-форма может быть только *p*-компонентой. При этом все *C*- и $B_2 – B_6$-формы могут иметь только вид, показанный на Рис. 28(3 – 9).

Если учесть теперь, что в каждой формуле существует возможность поменять местами две $B_2 – B_6$-формы, то с учетом поворотов, отражений и М-преобразований для этой группы существует $6\cdot 2 = 12$ различных классических матриц.

Так как с помощью М-преобразований из каждой классической матрицы 4-го порядка можно получить три новых (см. Раздел 3.1.2), то с точностью до поворотов и отражений общее количество различных регулярных классических матриц 4×4 подсчитывается так:

$$(48 + 28 + 12)\cdot 4 = 88\cdot 4 = 352.$$

8	16	9	1
13	5	12	4
2	10	7	15
11	3	6	14

(1)– $B_1C_1A_2A_3$

8	9	16	1
13	7	10	4
2	12	5	15
11	6	3	14

(2)–$B_1C_2A_1A_4$

7	1	10	16
11	13	4	6
14	12	5	3
2	8	15	9

(3)-$B_1C_1B_2A_2$

9	5	4	16
6	10	3	15
12	8	13	1
7	11	14	2

(4)-$B_1C_1B_3A_2$

10	6	3	15
5	9	4	16
12	8	13	1
7	11	14	2

(5)-$B_1C_1B_3A_3$

10	6	3	15
1	13	8	12
16	4	9	5
7	11	14	2

(6)-$B_1C_1B_4A_3$

7	10	1	16
11	5	12	6
14	4	13	3
2	15	8	9

(7)-$B_1C_2B_2A_1$

10	3	6	15
5	9	4	16
12	8	13	1
7	14	11	2

(8)-$B_1C_2B_5A_4$

10	3	6	15
1	13	8	12
16	4	9	5
7	14	11	2

(9)-$B_1C_2B_6A_4$

13	3	2	16
7	9	6	12
10	8	11	5
4	14	15	1

(10)-$B_1C_1B_2B_3$

13	3	2	16
5	11	8	10
12	6	9	7
4	14	15	1

(11)-$B_1C_1B_2B_4$

9	7	2	16
5	11	4	14
12	6	13	3
8	10	15	1

(12)-$B_1C_1B_3B_4$

13	2	3	16
7	9	6	12
10	8	11	5
4	15	14	1

(13)-$B_1C_2B_2B_5$

13	2	3	16
5	11	8	10
12	6	9	7
4	15	14	1

(14)-$B_1C_2B_2B_6$

9	2	7	16
5	11	4	14
12	6	13	3
8	15	10	1

(15)-$B_1C_2B_5B_6$

Рис. 29. Примеры классических матриц 4×4 для *k*,*l*,*m*,*p*-формул вида *BCAA*, *BCAB* и *BCBB*.

Очевидно, что

в качестве компактной формы представления всех существующих регулярных классических матриц 4×4 *можно использовать не только полную таблицу алгебраических формул вида*

BCAA, *BCAB и BCBB*, *но и список регулярных классических матриц, в котором содержится по одному произвольно выбранному для каждой k,l,m,p-формулы экземпляру классической матрицы.*

Список регулярных классических матриц 4×4, с помощью которого можно восстановить полную таблицу *k,l,m,p*-формул вида *BCAA*, *BCAB* и *BCBB*, представлен на Рис. 29.

Используя результаты проведенных подсчетов, получаем что, с точностью до поворотов и отражений существует всего

$$528 + 352 = 880$$

правильных и регулярных классических матриц 4×4.

В 1640 г. Б. Френикл составил полный список классических матриц 4×4 {см., *Frenicle B.* Des carres magiques / Divers ouvrages de math. et de phys. par. Ms. de l'Academie Royale des Sciences. 1693; *Frenicle B.* (1640) Lettre a' B. Frenicle de Bessey et de Fermat a' Mersenne (1640) / Oeuvres de Fermat 2. Paris, 1894}. Так как в его списке таких матриц оказалось 880, то приходим к выводу, что

нерегулярных классических матриц 4×4 не существует.

Способ 2. Квадратную таблицу из 16-и клеток, внутри которой содержатся 4 различных символа, а каждый символ встречается 4 раза, будем называть ***обобщенной латинской матрицей*** порядка 4. При этом две обобщенные латинские матрицы 4×4 будем называть ***ортогональными***, если в результате их (поклеточного) сложения получится матрица 4×4, содержащая в своих клетках 16 различных наборов символов.

У т в е р ж д е н и е 2. *Любую k,l,m,p-формулу классической матрицы* 4×4 *можно разложить на две ортогональные обобщенные латинские матрицы. При этом для каждой k,l,m,p-формулы возможны три варианта подобного разложения*.

Доказательство. Пусть сочетание четырех форм F_1, F_2, F_3 и F_4 является *k,l,m,p*-формулой классической матрицы 4-го порядка. Тогда по определению (см. Способ 1) формы F_1, F_2, F_3 и F_4 содержат в своих клетках два различных символа, каждый из которых внутри форм встречается 8 раз. Если совместить друг с другом любые две различные *F*-формы *k,l,m,p*-формулы, то, как указывалось ранее, во всех случаях 4 одинаковых символа одной формы придутся на 4 одинаковых символа другой формы. Отсюда следует, что все 6 пар F_1F_2, F_1F_3, F_1F_4, F_2F_3, F_2F_4 и F_3F_4 являются обобщенными латинскими матрицами. Так как по определению k,l,m,p-формула содержит 16 различных наборов символов, из указанных 6-и пар F-форм ортогональными являются только те, из которых путем их объединения в четверки можно получить исходную k, l, m, p-формулу магической матрицы:

$$F_1F_2 - F_3F_4, \quad F_1F_3 - F_2F_4 \quad \text{и} \quad F_1F_4 - F_2F_3.$$

Если во всех обобщенных латинских матрицах, входящих в разложения k,l,m,p-формулы, заменить различные наборы символов, соответственно, на различные абстрактные символы, то в результате этой операции получим алгебраические формулы магических матриц ***нового*** типа. В дальнейшем подобные формулы, имеющие вид двух ортогональных обобщенных латинских матриц, содержащих по 4 различных абстрактных символа, будем называть ***двухкомпонентными алгебраическими формулами*** магических матриц 4×4.

Напомним, что разложение любой классической матрицы 4×4 на k-, l-, m-, p-компоненты связано с разбиениями чисел от 1 до 16 на пять слагаемых следующего вида:

$$N = 8k + 4l + 2m + p + 1,$$

где параметры k,l,m,p могут принимать только значения 0 или 1.

Пусть таблицы F_1, F_2, F_3 и F_4 — k-, l-, m-, p-компоненты некоторой классической матрицы 4-го порядка. Тогда разложение классической матрицы 4×4 на пары ортогональных обобщенных латинских матриц $F_1F_2 - F_3F_4$, $F_1F_3 - F_2F_4$ и $F_1F_4 - F_2F_3$ (на двухкомпонентные алгебраические формулы) можно связать со следующими разбиениями натуральных чисел от 1 до 16 на три слагаемых:

$$N = (8k + 4l) + (2m + p) + 1 = s + t + 1,$$
$$N = (8k + 2m) + (4l + p) + 1 = g + h + 1,$$
$$N = (8k + p) + (4l + 2m) + 1 = r + e + 1.$$

Пользуясь указанными формулами для N, составим Таблицу 7, устанавливающую взаимно однозначное соответствие между числами от 1 до 16 и их разложениями на s,t-, g,h- и r,e-компоненты.

Таблица 7. Взаимно однозначное соответствие между числами от 1 до 16 и их разложениями на s,t-, g,h- и r,e-компоненты.

s,t-компонента

N	s		t	
1	s_1	0	t_1	0
2	s_1	0	t_2	1
3	s_1	0	t_3	2
4	s_1	0	t_4	3
5	s_2	4	t_1	0
6	s_2	4	t_2	1
7	s_2	4	t_3	2
8	s_2	4	t_4	3
9	s_3	8	t_1	0
10	s_3	8	t_2	1
11	s_3	8	t_3	2
12	s_3	8	t_4	3
13	s_4	12	t_1	0
14	s_4	12	t_2	1
15	s_4	12	t_3	2
16	s_4	12	t_4	3

g,h-компонента

N	g		h	
1	g_1	0	h_1	0
2	g_1	0	h_2	1
3	g_2	2	h_1	0
4	g_2	2	h_2	1
5	g_1	0	h_3	4
6	g_1	0	h_4	5
7	g_2	2	h_3	4
8	g_2	2	h_4	5
9	g_3	8	h_1	0
10	g_3	8	h_2	1
11	g_4	10	h_1	0
12	g_4	10	h_2	1
13	g_3	8	h_3	4
14	g_3	8	h_4	5
15	g_4	10	h_3	4
16	g_4	10	h_4	5

r,e-компонента

N	r		e	
1	r_1	0	e_1	0
2	r_2	1	e_1	0
3	r_1	0	e_2	2
4	r_2	1	e_2	2
5	r_1	0	e_3	4
6	r_2	1	e_3	4
7	r_1	0	e_4	6
8	r_2	1	e_4	6
9	r_3	8	e_1	0
10	r_4	9	e_1	0
11	r_3	8	e_2	2
12	r_4	9	e_2	2
13	r_3	8	e_3	4
14	r_4	9	e_3	4
15	r_3	8	e_4	6
16	r_4	9	e_4	6

Пусть имеется список всех 880-и классических матриц 4×4. Тогда с его помощью, пользуясь указанными соответствиями, можно получить 3 полных набора s,t-, g,h- и r,e-формул {***(s,t), (g,h) и (r,e) наборы двухкомпонентных алгебраических формул***}. Далее найдем список формул, входящих в (s,t), (g,h) и (r,e) наборы, и объясним, каким образом двухкомпонентные формулы можно использовать для генерирования классических матриц 4×4.

Магические матрицы вида AAAA (см. Способ 1). Пусть сочетание четырех форм F_1, F_2, F_3 и F_4 является k,l,m,p-формулой правильной магической матрицы 4-го порядка. Тогда, существует 24 различных варианта выбора F-форм в качестве k-, l-, m-, p-компонент классических матриц 4×4. Для примера рассмотрим всего три подобных варианта. При этом для каждого из вариантов построим соответствующие ему двухкомпонентные s,t-, g,h- и r,e-формулы:

k	l	m	p	(s,t)	(g,h)	(r,e)
F_1	F_2	F_3	F_4	$F_1F_2 - F_3F_4$	$F_1F_3 - F_2F_4$	$F_1F_4 - F_2F_3$
F_1	F_3	F_4	F_2	$F_1F_3 - F_2F_4$	$F_1F_4 - F_2F_3$	$F_1F_2 - F_3F_4$
F_1	F_4	F_2	F_3	$F_1F_4 - F_2F_3$	$F_1F_2 - F_3F_4$	$F_1F_3 - F_2F_4$

Обратим внимание на то, что в 3-х рассмотренных случаях s,t-, g,h- и r,e-формулы каждый раз разные. Из этого факта с учетом Утверждения 2 следует

а) для правильных классических матриц 4×4 (s,t), (g,h) и (r,e) наборы состоят из одних и тех же двухкомпонентных алгебраических формул;

б) пусть F_1, F_2, F_3, F_4 — некоторая k,l,m,p-формула правильной магической матрицы, а {M} — множество классических матриц 4×4, которые можно генерировать с ее помощью. Тогда множество классических матриц {M} можно получить всего из одной двухкомпонентной алгебраической формулы (например, $F_1F_2 - F_3F_4$), если рассматривать ее последовательно как s,t-, g,h- и r,e-формулу.

Магические матрицы вида B_1CAA (см. Способ 1). Обозначим A-формы через F_1 и F_2. Выпишем все возможные варианты выбора B_1-, C-, F_1- и F_2-форм в качестве компонент классических матриц 4-го порядка и для каждого случая найдем s,t-, g,h- и r,e-формулы:

k	l	m	p	(s,t)	(g,h)	(r,e)
F_1	F_2	B_1	C	$F_1F_2 - B_1C$	$F_1B_1 - F_2C$	$F_2B_1 - F_1C$
F_2	F_1	B_1	C	$F_1F_2 - B_1C$	$F_2B_1 - F_1C$	$F_1B_1 - F_2C$
F_1	B_1	C	F_2	$F_1B_1 - F_2C$	$F_2B_1 - F_1C$	$F_1F_2 - B_1C$
F_2	B_1	C	F_1	$F_2B_1 - F_1C$	$F_1B_1 - F_2C$	$F_1F_2 - B_1C$
B_1	C	F_1	F_2	$F_1F_2 - B_1C$	$F_1B_1 - F_2C$	$F_2B_1 - F_1C$
B_1	C	F_2	F_1	$F_1F_2 - B_1C$	$F_2B_1 - F_1C$	$F_1B_1 - F_2C$

Рассматривая приведенную таблицу, можно убедиться, что для классических матриц 4×4 с одной и той же k,l,m,p-формулой вида B_1CAA (s,t) и (r,e) наборы одинаковы и состоят из трех двухкомпонентных алгебраических формул, а (g,h) набор состоит всего из двух двухкомпонентных алгебраических формул, которые имеют вид $AB_1 - AC$. Таким образом, если F_1, F_2, F_3, F_4 — некоторая k,l,m,p-формула вида B_1CAA, а {M} — множество классических матриц 4×4, которые можно генерировать с ее помощью, то множество классических матриц {M} можно получить всего из одной двухкомпонентной алгебраической формулы вида $AB_1 - AC$, если рассматривать ее последовательно как s,t-, g,h- и r,e-формулу.

Магические матрицы вида B_1CBA (см. Способ 1). Легко получить, что в этом случае существует всего два варианта выбора B_1-, C-, B- и A-форм в качестве компонент классических матриц 4-го порядка:

k	l	m	p	(s,t)	(g,h)	(r,e)
B_1	B	C	A	$B_1B - AC$	$AB - B_1C$	$AB_1 - BC$
A	B_1	B	C	$AB_1 - BC$	$AB - B_1C$	$B_1B - AC$

Из приведенных результатов следует, что для классических матриц 4×4 с одной и той же k,l,m,p-формулой вида B_1CBA (s,t) и (r,e) наборы одинаковы и состоят из двух двухкомпонентных алгебраических формул, а (g,h) набор состоит всего из одной двухкомпонентной алгебраической формулы. Таким образом, если F_1, F_2, F_3, F_4 — некоторая k,l,m,p-формула вида B_1CBA, а {M} — множество классических матриц 4×4, которые можно генерировать с ее помощью, то множество классических матриц {M} можно получить всего из одной двухкомпонентной алгебраической формулы вида $AB - B_1C$, если рассматривать ее как g,h-формулу.

Магические матрицы вида B_1CBB (см. Способ 1). Обозначим B-формы через F_1 и F_2. Как и в предыдущем пункте, в данном случае существует только два варианта выбора B_1-, C-, F_1- и F_2-форм в качестве компонент классических матриц 4-го порядка:

k	l	m	p	(s,t)	(g,h)	(r,e)
B_1	F_1	F_2	C	$B_1F_1 - CF_2$	$B_1F_1 - CF_2$	$B_1C - F_1F_2$
B_1	F_2	F_1	C	$B_1F_2 - CF_1$	$B_1F_2 - CF_1$	$B_1C - F_1F_2$

Таким образом, для классических матриц 4×4 с одной и той же k,l,m,p-формулой вида B_1CBB (s,t) и (g,h) наборы одинаковы и состоят из двух двухкомпонентных алгебраических формул, а

(r,e) набор — из одной. Таким образом, если F_1, F_2, F_3, F_4 — некоторая k,l,m,p-формула вида B_1CBB, а {M} — множество классических матриц 4×4, которые можно генерировать с ее помощью, то множество классических матриц {M} можно получить всего из одной двухкомпонентной алгебраической формулы вида $B_1C - BB$, если рассматривать ее как r,e-формулу.

Приведем ***минимальный набор*** двухкомпонентных алгебраических формул, пригодный для генерирования всех существующих классических матриц 4×4:

(s, t), (g, h), (r, e)	(g, h)	(r, e)
1. $(A_1A_6 - A_2A_5)$	5. $(B_1C_1 - B_2A_2)$	11. $(B_1C_1 - B_2B_4)$
2. $(A_4A_3 - A_5A_6)$	6. $(B_1C_1 - B_3A_3)$	12. $(B_1C_1 - B_3B_4)$
3. $(B_1A_3 - C_1A_2)$	7. $(B_1C_1 - B_4A_3)$	13. $(B_1C_2 - B_2B_5)$
4. $(B_1A_4 - C_2A_1)$	8. $(B_1C_2 - B_2A_1)$	14. $(B_1C_2 - B_2B_6)$
	9. $(B_1C_2 - B_5A_4)$	15. $(B_1C_2 - B_5B_6)$
	10. $(B_1C_2 - B_6A_4)$	

Важной ***особенностью*** указанного набора является то, что множества классических матриц 4×4, которые можно получить с помощью каждой из пятнадцати формул, не имеют одинаковых матриц.

Б. Методы построения магических матриц 4×4 *из простых чисел*. Считая известным список классических матриц 4×4, обсудим теперь, как с его помощью можно строить магические матрицы 4×4 из простых чисел.

На Рис. 30 представлены

а) вспомогательные матрицы 30(1 – 8), построенные с помощью Рис. 25(3, 4) из символьных магических матриц 26(1 – 8) {как и в Разделе 3.1.3 предполагается, что таблица, изображенная на Рис. 25(4), указывает нумерацию клеток магических матриц, а таблица, изображенная на Рис. 25(3), — нумерацию клеток вспомогательных матриц};

a_1	a_1	a_1	a_1
p_1	p_1	p_1	p_1
a_1	a_1	a_1	a_1
p_1	p_1	p_1	p_1

(1) – A_1

a_2	p_2	a_2	p_2
a_2	p_2	a_2	p_2
a_2	p_2	a_2	p_2
a_2	p_2	a_2	p_2

(2) – A_2

a_3	a_3	a_3	a_3
a_3	a_3	a_3	a_3
p_3	p_3	p_3	p_3
p_3	p_3	p_3	p_3

(3) – A_3

a_4	p_4	a_4	a_4
p_4	a_4	a_4	a_4
p_4	p_4	p_4	a_4
p_4	p_4	a_4	p_4

(4) – A_4

p_5	a_5	a_5	p_5
p_5	a_5	a_5	p_5
p_5	a_5	a_5	p_5
p_5	a_5	a_5	p_5

(5) – A_5

a_6	a_6	a_6	a_6
p_6	p_6	p_6	p_6
p_6	p_6	p_6	p_6
a_6	a_6	a_6	a_6

(6) – A_6

p_7	p_7	a_7	a_7
p_7	p_7	a_7	a_7
p_7	p_7	a_7	a_7
p_7	p_7	a_7	a_7

(7) – A_7

p_8	a_8	a_8	a_8
a_8	p_8	a_8	a_8
p_8	p_8	a_8	p_8
p_8	p_8	p_8	a_8

(8) – A_8

d	d	d	d
d	d	d	d
d	d	d	d
d	d	d	d

(9) – D

r_1	r_1	r_1	r_1
r_4	r_4	r_4	r_4
r_3	r_3	r_3	r_3
r_2	r_2	r_2	r_2

(10) – r

e_3	e_2	e_1	e_4
e_3	e_2	e_1	e_4
e_3	e_2	e_1	e_4
e_3	e_2	e_1	e_4

(11) – e

g_1	g_4	g_1	g_4
g_3	g_2	g_3	g_2
g_1	g_4	g_1	g_4
g_3	g_2	g_3	g_2

(12) – g

0	b	$2b$	$3b$
$4b$	$5b$	$6b$	$7b$
$8b$	$9b$	$10b$	$11b$
$12b$	$13b$	$14b$	$15b$

(13) – B

19	23	103	107
113	97	29	13
83	79	47	43
37	53	73	89

(14)

Рис. 30. Вспомогательные таблицы (1 – 13) для построения магических матриц 4×4 из простых чисел и численный пример магической матрицы $B + g$, содержащей только простые числа (14).

б) таблица 30(9), которую необходимо воспринимать как вспомогательную матрицу тривиальной магической матрицы 4×4, содержащей во всех своих 16-и клетках один и тот же символ d;

в) вспомогательные матрицы 30(10 – 12), построенные с помощью Рис. 25(3, 4) соответственно из *r*-, *e*- и *g*-компонент, которые получаются при разложении *k,l,m,p*-формулы вида $A_1A_2A_5A_6$ на двухкомпонентные алгебраические формулы;

г) вспомогательная матрица 30(13), которая получается в результате уменьшения всех чисел таблицы 25(3) на единицу и последующего умножения всех чисел этой таблицы на символ *b*;

д) численный пример 30(14) магической матрицы $B + g$, построенной из суммы вспомогательных матриц 30(12) и 30(13).

Если сложить (поклеточно) вспомогательную матрицу *B* с матрицами $A_1 – A_8$, *D, r, e* и *g* {см. Рис. 30(1 – 13)}, то в результате получим ***новые*** вспомогательные матрицы, из которых с помощью таблицы (классической матрицы) 25(4), можно получить новые символьные магические матрицы 4-го порядка (новые алгебраические формулы магических матриц 4×4, содержащие соответственно 2, 3 и 5 произвольно задаваемых параметров).

Исследуем законы, которым подчиняются наборы символов указанных новых вспомогательных матриц 4×4.

Матрица $B + D$. Если, считая, что параметры *b* и *d* больше нуля, расставить символы матрицы $B + D$ в порядке их возрастания, то легко убедиться, что

в клетках этой матрицы находится арифметическая прогрессия из 16-*и чисел (разность прогрессии равна* b, *а первое число — d).*

Так как вид вспомогательных матриц *B* и *D* не зависит от того, какая классическая матрица 4-го порядка использовалась для их получения, то из устройства таблицы $B + D$ следует

для всех 880 *различных классических матриц* 4×4 *задача о получении из них 880 различных магических матриц* 4-*го порядка, содержащих только простые числа, решается просто, если известна хотя бы одна арифметическая прогрессия, составленная из* 16-*и простых чисел.*

При $k = 0, 1, \ldots, 15$ требуемую прогрессию можно получить из формулы 53 297 929 + 9 699 690 *k*, которая приведена в публикации (*Pritchard, P.A.* Long arithmetic progressions of primes: some old, some new / Math. Comp., **45**, 1985. P.263–267.)

Матрица $B + A_2$. В клетках вспомогательной матрицы $B + A_2$ содержатся 8 наборов символов, в которые входит параметр a_2, и 8 наборов символов, в которые входит параметр p_2. Расположив по возрастанию все 8 наборов символов, в которые входит параметр a_2 и, соответственно, параметр p_2 (считаем, что a_2, p_2 и b больше нуля), можно убедиться, что

в клетках указанной матрицы находятся две различные арифметические прогрессии с одинаковым числом членов и одной и той же разностью.

Таким образом,

для построения из простых чисел рассматриваемой вспомогательной матрицы достаточно найти хотя бы две арифметические прогрессии, каждая из которых состоит из 8-*и простых чисел, а разности обеих прогрессий одинаковы.*

Если разность прогрессии положить равной 210, то, выбрав в качестве первого члена числа 199 и 881, можно получить две арифметические прогрессии, состоящие соответственно из десяти и восьми простых чисел.

Подсчитаем, сколько магических матриц 4×4 можно получить из таблицы $B + A_2$, если известен список классических матриц 4×4 и две арифметические прогрессии, имеющие одинаковую разность прогрессии и состоящие из 8-и простых чисел.

Из анализа Рис. 30(2), можно заключить, что все 8 символов a_2 расположены в клетках вспомогательной матрицы A_2, имеющих нечетные номера и, соответственно, все 8 символов p_2 — в клетках матрицы A_2, имеющих четные номера {напомним, что нумерация клеток вспомогательных таблиц 4×4 производится в соответствии с порядком расположения чисел в таблице 25(3)}. Очевидно, что для получения из заданной классической матрицы 4×4 вспомогательной таблицы с таким распределением параметров a_2 и p_2, достаточно

нечетные числа в классической матрице 4×4 *заменить, например, символом* a_2, *а четные числа — символом* p_2.

Из описания способа построения вспомогательной таблицы A_2 получаем, что

эту таблицу и, следовательно, вспомогательную таблицу $B + A_2$ можно построить только из таких классических матриц 4×4, у которых в k,l,m,p-формуле p-компонента является магической.

Легко установить, что с точностью до поворотов и отражений указанным свойством обладают

– все правильные классические матрицы 4×4 (имеющие алгебраическую формулу вида *AAAA*),

– две трети классических матриц 4×4 вида B_1CAA,

– половина классических матриц 4×4 вида B_1ACB,

то есть всего 528 + 192×(2/3) + 112/2 = 712 классических матриц 4×4.

Из этого результата следует, что

зная список классических матриц 4×4 и один вариант таблицы $B + A_2$, заполненной простыми числами, с точностью до поворотов и отражений можно получить 712 различных магических матриц 4×4 из простых чисел.

Матрицы $B + A_1$, $B + A_4$, $B + A_5$, $B + A_6$, $B + A_7$ *и* $B + A_8$. Поиск закона, которому подчиняются числа перечисленных вспомогательных матриц, осуществляется так же, как это сделано для таблицы $B + A_2$.

Поэтому, не останавливаясь на подробном описании этих законов, приведем для каждой матрицы такие значения их параметров, при которых их клетки будут заполнены шестнадцатью различными простыми числами (приведенные значения параметров a и p необходимо воспринимать как значения первых членов соответствующих образованных этими символами возрастающих последовательностей из 8-и чисел).

$B + A_1$:	$a_1 = 37$;	$p_1 = 557$;	$b = 30$;
$B + A_4$:	$a_4 = 521$;	$p_4 = 23$;	$b = 30$;
$B + A_5$:	$a_5 = 467$;	$p_5 = 7$;	$b = 120$;
$B + A_6$:	$a_6 = 71$;	$p_6 = 199$;	$b = 210$;
$B + A_7$:	$a_7 = 7$;	$p_7 = 347$;	$b = 120$;
$B + A_8$:	$a_8 = 2549$;	$p_8 = 13$;	$b = 30$;

Матрица $B + A_3$. Легко убедиться, что

в клетках матрицы $B + A_3$ *находится такой же набор чисел, что и в матрице* $B + A_2$.

Отметим, однако, что в отличие от матрицы $B + A_2$

зная список классических матриц 4×4 и один вариант матрицы $B + A_3$, *заполненной простыми числами, с точностью до поворотов и отражений можно получить всего 528 различных магических матриц 4×4 из простых чисел.*

Матрицы $B + e$ *и* $B + r$. Расположив в порядке возрастания наборы символов, в которые входят параметры e_1, e_2, e_3, e_4 и, соответственно, параметры r_1, r_2, r_3, r_4 матриц $B + e$ и $B + r$, можно убедиться, что

в клетках обеих матриц находятся 16 чисел, образующих 4 арифметические прогрессии из четырех чисел с одной и той же разностью прогрессии.

Чтобы при разности прогрессий $b = 6$ получить из простых чисел пример указанного набора из четырех арифметических прогрессий, достаточно в качестве первых членов прогрессий выбрать числа 1, 5, 41 и 61.

Матрица $B + g$. Расположив в порядке возрастания наборы g-символов с одинаковыми номерами, можно убедиться, что

все четыре упорядоченные по возрастанию g *последовательности матрицы* $B + g$ *устроены одинаково*

$$g,\ g + c,\ g + 4c,\ g + 5c,$$

где под g следует понимать первые члены соответствующих g-последовательностей таблицы $B + g$, а $c = 2b$.

Отметим также, что с помощью Рис. 25(4) можно превратить таблицу $B + g$ в магическую матрицу только в том случае, если между параметрами g_i выполняется соотношение $g_1 + g_2 = g_3 + g_4$. Таким образом,

при поиске подходящих для матрицы $B + g$ *простых чисел достаточно найти сначала ряд различных последовательностей из четырех простых чисел, подчиняющихся одному и тому же указанному выше закону, а затем выбрать из них такие последо-*

вательности, для первых членов которых выполняется соотношение $g_1 + g_2 = g_3 + g_4$.

При $c = 6$ подходящие g последовательности образуются при $g = 13; 23; 73; 83$; при $c = 12$: $g = 11; 41; 151; 181$; при $c = 16$: $g = 11; 41; 109; 139$; и т. д. Наименьшая магическая матрица, которую можно построить из указанных трех различных наборов простых чисел, показана на Рис. 30(14).

3.1.5. Методы построения магических матриц 4×4 из структурированного набора 16-и простых чисел

Как указано в Разделе 1.3.5,

а) Магическая матрица порядка 4 обладает структурой, если из ее 16-и различных чисел можно составить 8 пар чисел с суммой равной 1/2 от магической постоянной матрицы. Для получения рисунка структуры магической матрицы достаточно внутри матрицы соединить линиями каждую пару чисел, образующих структуру.

б) С точностью до поворотов и отражений классические матрицы 4×4 могут иметь только 12 различных рисунков структур.

в) В магических матрицах 4×4, обладающих рисунком структуры и составленных из произвольных 8-и четных и 8-и нечетных чисел, можно найти с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований еще 6 новых рисунков структур, которые не встречаются у магических матриц из чисел от 1 до 16.

г) Ни в одной магической матрице 4×4, обладающей рисунком структуры, нельзя найти с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований никаких других рисунков структур кроме тех, которые встречаются у магических матриц 4×4, составленных из произвольных 8-и четных и 8-и нечетных чисел.

Все типы рисунков структур, которые с точностью до поворотов и отражений могут иметь классические матрицы 4×4 {см. пункт (б)}, показаны на Рис. 31.

Шесть новых рисунков структур, которые не встречаются у магических матриц из чисел от 1 до 16 {см. пункт (в)}, показаны на Рис. 32(1 – 6).

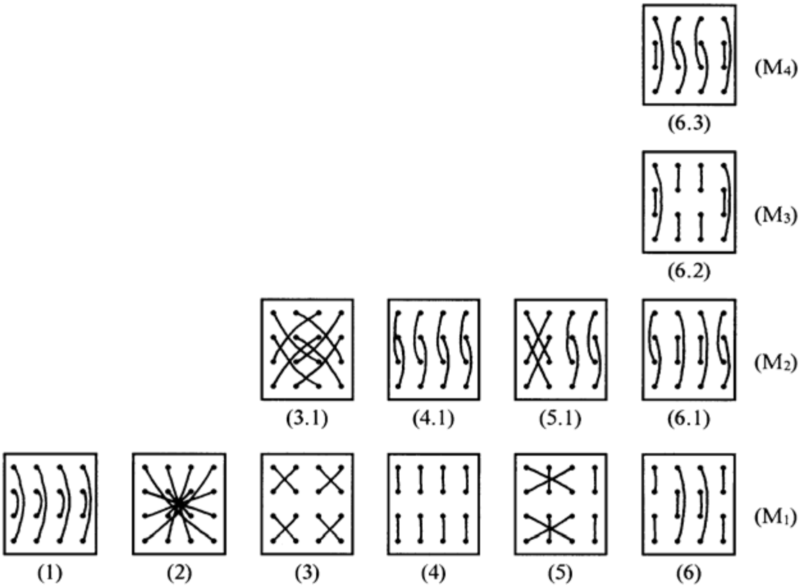


Рис. 31. Все типы рисунков структур, которые с точностью до поворотов и отражений могут иметь классические матрицы 4×4.

Отметим, что

– множество рисунков структур, которые могут иметь классические матрицы 4×4, совпадает с множеством рисунков структур, которые имеют 22 классические матрицы, представленные на Рис. 27 и Рис. 29 (см. далее Утверждение 3).
– рисунки структур 31(3.1 – 6.1, 6.2, 6.3), можно получить с помощью М-преобразований из рисунков структур 31(1 – 6);
– рисунки структур 32(1.1 – 6.1, 2.2 – 6.2, 2.3 – 6.3), можно получить с помощью М-преобразований из рисунков структур 32(1 – 6);

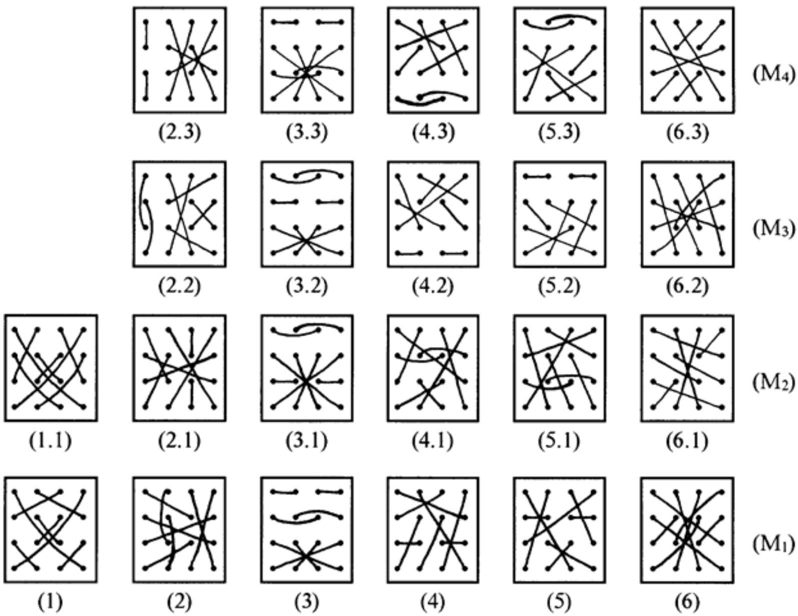


Рис. 32. Новые типы рисунков структур, которые с точностью до поворотов и отражений могут иметь магические матрицы 4×4, составленные из наборов 16-и различных чисел.

– существует еще один (***неявный***) способ представления рисунка структуры магической матрицы 4×4, который заключается в том, что, выбрав 8 различных символов, каждую из образующих структуру пару чисел заменяют в магической матрице каким-либо одним символом.

Например, если в качестве 8-и различных символов выбрать цифры 1, 2, …, 8, то рисунки структур, приведенные на Рис. 31(1 – 6) и Рис. 32(1 – 6), можно представить в виде числовых матриц 4×4, показанных соответственно на Рис. 33(1 – 6) и Рис. 33(7 – 12).

В связи с тем, что классические матрицы 4×4 имеют рисунки структур, возникает естественный вопрос: можно ли и как из заданной классической матрицы 4×4 строить магические матрицы 4×4 из простых чисел, обладающие таким же рисунком структуры, что и классическая матрица?

1	2	3	4
5	6	7	8
5	6	7	8
1	2	3	4

(1)

1	2	3	4
5	6	7	8
8	7	6	5
4	3	2	1

(2)

1	2	3	4
2	1	4	3
5	6	7	8
6	5	8	7

(3)

1	2	3	4
1	2	3	4
5	6	7	8
5	6	7	8

(4)

1	2	3	4
3	2	1	4
5	6	7	8
7	6	5	8

(5)

1	2	3	4
1	5	6	4
7	5	6	8
7	2	3	8

(6)

1	2	3	4
3	5	6	2
7	6	5	8
4	7	8	1

(7)

1	2	3	4
5	6	1	7
7	2	8	5
8	6	4	3

(8)

1	1	2	2
3	4	3	4
5	6	7	8
8	7	6	5

(9)

1	2	3	4
3	5	6	1
7	7	8	8
5	6	4	2

(10)

1	2	3	4
5	5	6	6
4	7	8	3
2	8	1	7

(11)

1	2	3	4
5	6	7	8
6	4	8	1
7	3	2	5

(12)

Рис. 33. Неявный способ представления полного набора рисунков структур, которые с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований могут иметь магические матрицы 4×4.

А. Обсудим сначала, можно ли для решения сформулированной задачи использовать какие-либо методы, рассмотренные в Разделе 3.1.4.

Легко доказать, что

в результате суммирования (*поклеточно*) *двух магических матриц, обладающих одинаковым размером и рисунком структуры, получается магическая матрица, обладающая тем же самым размером и рисунком структуры, что и исходные матрицы.*

Отсюда следует, что

поставленную задачу можно решить методами, рассмотренными в Разделе 3.1.4, *если при построении алгебраических формул магических матриц* 4×4 *использовать лишь символьные магические матрицы, обладающие тем же самым рисунком структуры, что и заданная классическая матрица* 4×4.

Например, среди приведенных на Рис. 26(1 – 8) двухсимвольных магических таблиц $A_1 - A_8$ тот же самый рисунок структуры, что и классическая матрица 25(4), имеют таблицы $A_1 - A_4$, A_7, A_8 (это для них один из возможных рисунков структур). По этой причине

все магические матрицы из простых чисел, которые можно получить методами, рассмотренными в Разделе 3.1.4, *из вспомогательных таблиц*

$$B + A_1,\quad B + A_2,\quad B + A_3,\quad B + A_4,\quad B + A_7,\quad B + A_8,$$

$$B + g = B + A_1 + A_2 \ \ (g_1 + g_2 = g_3 + g_4),$$

будут иметь одинаковые рисунки структур, совпадающие с рисунком структуры классической матрицы 25(4).

Б. Продемонстрируем, что для решения обсуждаемой задачи можно использовать k,l,m,p-формулы, рассмотренные в Разделе 3.1.4.

У т в е р ж д е н и е 3. *Всякая k,l,m,p-формула классической матрицы* 4×4 *обладает рисунком структуры. При этом рисунок структуры у алгебраической формулы и у всех классических матриц, которые можно получить с ее помощью, одинаков.*

Доказательство. Справедливость первой части Утверждения 3 следует из приведенного ранее соответствия между числами от 1 до 16 и набором символов в k,l,m,p-формулах {см. Таблицу 4 в Разделе 3.1.4}. *Действительно*, складывая попарно наборы символов, которые соответствуют числам 1 и 16, 2 и 15 и т. д., можно убедиться, что k,l,m,p-формулы классических матриц 4×4 состоят из структурированного набора элементов и, следовательно, имеют рисунок структуры.

Справедливость второй части Утверждения 3 следует из того факта, что перестановки местами компонент k,l,m,p-формулы и символов внутри самих компонент, с помощью которых из данной k,l,m,p-формулы генерируются различные классические матрицы, не приводят к изменению внешнего вида самой k,l,m,p-формулы.

У т в е р ж д е н и е 4. *Вспомогательные матрицы всех k,l,m,p-формул можно получить всего из одной таблицы, общий вид которой показан на Рис.* 34(1).

Доказательство.

1. Как известно из Раздела 1.3.4 (см. Способ 1), все правильные классические матрицы 4–го порядка можно разложить на четыре A-компоненты, каждая из которых является магической и содержит 8 нулей и 8 единиц. Обозначим эти A-компоненты символами F_1, F_2, F_3, F_4, а символом T — тривиальную магическую матрицу, 16 клеток которой заполнены единицами.

Тогда любую правильную классическую матрицу 4×4 можно представить в виде суммы 5-и матриц (первые три F-матрицы должны быть умножены на числа 8, 4 и 2):

$$8F_1 + 4F_2 + 2F_3 + F_4 + T.$$

Алгебраическим ***обобщением*** этой записи является выражение

$$aF_1 + bF_2 + cF_3 + dF_4 + eT,$$

которое представляет собой ***общую форму записи*** магической матрицы 4×4, разложимой на сумму четырех A-компонент и тривиальной матрицы eT {напомним (см. Раздел 2.4.4), что под операцией rF, где r — число, а F — матрица, понимается умножение на r всех элементов матрицы F}.

Так как числа классической матрицы 4×4 можно вычислить из формулы $8k + 4l + 2m + p + 1$, где параметры k, l, m и p могут принимать только значения 0 или 1, то алгебраическое обобщение этой формулы $ak + bl + cm + dp + e$, очевидно, позволяет найти те символы, которые находятся в клетках ***общей алгебраической формулы правильной магической матрицы* 4×4**. При этом между числами от 1 до 16 и символами обсуждаемой алгебраической формулы существует следующая связь:

1 — e,	5 — $e + b$,	9 — $e + a$,	13 — $e + a + b$,
2 — $e + d$,	6 — $e + b + d$,	10 — $e + a + d$,	14 — $e + a + b + d$,
3 — $e + c$,	7 — $e + b + c$,	11 — $e + a + c$,	15 — $e + a + b + c$,
4 — $e+c+d$,	8 — $e+b+c+d$,	12 — $e+a+c+d$,	16 — $e+a+b+c+d$.

Обратим внимание, что таблица, представленная на Рис. 34(1), содержит в своих клетках весь указанный набор символов и эти символы расставлены так, что в первой ее клетке находится символ e, во второй клетке — символы $e + d$, и т. д. Таким образом, указанная таблица является ***вспомогательной матрицей*** и из нее с помощью Рис. 25(4) можно построить общую алгебраическую формулу правильной магической матрицы 4-го порядка.

$e + a$	$e + d$	$e + c$	$e + c + d$
$e + b$	$e + b + d$	$e + b + c$	$e + b + c+ d$
$e + a$	$e + a + d$	$e + a + c$	$e + a + c+ d$
$e+a+b$	$e+a+b+d$	$e+a+b+c$	$e+a+b+c+d$

(1)

17	29	41	53
47	59	71	83
227	239	251	263
257	269	281	293

(2)

e	$e+d$	$e+c$	$e+c+d$
g	$g+d$	$g+c$	$g+c+d$
h	$h+d$	$h+c$	$h+c+d$
f	$f+d$	$f+c$	$f+c+d$

(3)

1	7	67	73
37	43	103	109
157	163	223	229
193	197	257	263

(4)

83	113	293	503
41	71	251	461
281	311	491	701
239	269	449	659

(5)

G_1(1)	G_1 (2)	$S_3 – G_1$ (2)	$S_3 – G_1$ (1)
$S_2–S_3+G_1$ (1)	$S_2–S_3+G_1$ (2)	$S_2 – G_1$ (2)	$S_2 – G_1$ (1)
$S_1–S_2+G_1$ (1)	$S_1–S_2+G_1$ (2)	$S_1–S_2+S_3–G_1$ (2)	$S_1–S_2+S_3–G_1$ (1)
$S_1–S_3+G_1$ (1)	$S_1–S_3+G_1$ (2)	$S_1 – G_1$ (2)	$S_1 – G_1$ (1)

(6)

Рис. 34. Вспомогательные матрицы для построения из простых чисел общих алгебраических формул правильных (1 – 6) и регулярных (2 – *AABC*, 4 – *ABBC*, 5 – *BBBC*) магических матриц 4×4.

Изменим форму записи таблицы 34(1), введя новые символы g, h и f при помощи соотношений $g = e + b$, $h = e + a$, $f = e + a + b$. Получившаяся в результате такой замены таблица показана на Рис. 34(3). Новая таблица помогает понять, что

в строках вспомогательной матрицы общей алгебраической формулы правильной магической матрицы 4×4 *находятся подчиняющиеся одному и тому же закону последовательности из четырех чисел*.

Отметим также, что таблица 34(3) (как легко убедиться) полностью соответствует исходной лишь в том случае, когда между ее параметрами e, g, h и f выполняется соотношение $e + f = g + h$.

Таким образом,

для построения конкретных примеров правильных магических матриц 4×4 *поиск указанных последовательностей из четырех чисел необходимо производить до тех пор, пока среди первых их членов не найдется таких двух пар чисел, сумма которых равна одному и тому же значению*.

Например, правильную магическую матрицу 4×4 можно построить из следующих 8-и пар простых чисел-близнецов:

(29, 31), (59, 61), (71, 73), (101, 103),
(197, 199), (227, 229), (239, 241), (269, 271.

2. Представленная на Рис. 34(1) таблица пригодна и для построения по заданным регулярным классическим матрицам 4×4 ***общих алгебраических формул регулярных магических матриц***. Однако в связи с тем, что в регулярных таблицах (см. Раздел 3.1.4) условие магичности не выполнено на диагоналях, в рассматриваемом случае для получения обсуждаемых алгебраических формул приходится задавать дополнительные соотношения между параметрами вспомогательной таблицы:

Формула				Соотношение между параметрами
k	*l*	*m*	*p*	
A	*A*	*B*	*C*	$c = 2d,$
B	*C*	*A*	*A*	$a = 2b,$
A	*B*	*C*	*A*	$b = 2c,$
A	*B*	*B*	*C*	$b = c + 2d,$
B	*B*	*C*	*A*	$a = b + 2c,$
B	*B*	*B*	*C*	$a = c + b + 2d.$

Отметим, что

i) конкретный вид дополнительных соотношений зависит от типа общей регулярной алгебраической формулы и того положения *C*-формы, которое она занимает в *k,l,m,p*-формуле регулярной матрицы 4×4;

ii) для заданного типа четырехкомпонентной регулярной формулы

набор символов, находящихся в клетках вспомогательных матриц, не зависит от вида дополнительных соотношений между параметрами таблицы 34(1) (*другими слова-*

ми, не зависит от положения С-формы в k,l,m,p-регулярных формулах).

iii) по причине, указанной в пункте (ii),

если для общих алгебраических формул типа AABC или ABBC из заданного набора 16-*и чисел можно построить одну вспомогательную таблицу, то можно построить и другие вспомогательные таблицы магических матриц заданного типа, отличающиеся от построенной видом дополнительных условий на параметры таблицы* 34(1).

{Для доказательства справедливости этого утверждения достаточно провести анализ всех 6-и вспомогательных матриц обсуждаемого типа}.

С учетом изложенного в пунктах (i) – (iii) для построения примеров регулярных магических матриц 4×4 из простых чисел достаточно всего трех заполненных простыми числами вспомогательных таблиц, примеры которых показаны на Рис. 34(2, 4, 5).

Интересно также отметить {см. Пример 3 в Разделе 2.3.2}, что

одновременный учет всех 6-*и дополнительных соотношений между параметрами представленной на Рис.* 34(1) *таблицы приводит к вспомогательной таблице, в клетках которой находится арифметическая прогрессия из* 16-*и чисел.*

В. Пользуясь сведениями, изложенными в пункте (Б), разработаем ***алгоритм***, с помощью которого из последовательности простых чисел можно генерировать заполненные простыми числами наборы вспомогательных таблиц, пригодные для получения ***полного списка*** правильных магических матриц 4-го порядка из простых чисел с одной и той же наперед заданной магической постоянной *S*.

1. Учитывая, что для построения правильных магических матриц 4×4 набор простых чисел должен быть структурированным {см. таблицу 34(1)}, а также то, что сумма двух простых (нечетных) чисел является четным числом, заключаем, что

   для существования решения рассматриваемой задачи необходимо, чтобы заданное значение S было числом, кратным четырем.

2. Подсчитаем значение $S_1 = S/2$ и найдем все возможные разбиения S_1 на два различных простых числа. Пусть существует K таких разбиений. Если $K < 8$, то решений искомой задачи не существует.
3. Договоримся, что всякое k-е разбиение S_1 на два простых числа будем записывать в виде $S_1 = P_1(k) + P_2(k)$, где $k = 1, 2, \ldots, K$ и $P_1(k)$ меньше как $P_2(k)$, так и $P_1(k+1)$.

   Из найденных в пункте 2 разбиений построим все возможные наборы из 8-и пар простых чисел $\{P_1(k), P_2(k)\}$, таких, что для каждого m-го набора семейство чисел $\{P_1(k)\}$ является структурированным, то есть для каждого m-го набора можно указать такое число $S_2(m)$, что $S_2(m) = G_1(j) + G_2(j)$, где $j = 1, 2, 3, 4$, и четыре пары простых чисел из семейства $\{G_1(j), G_2(j)\}$ совпадают с простыми числами $\{P_1(k)\}$.

   Пусть всего существует M наборов $\{P_1(k), P_2(k)\}$, в которых 8 простых чисел $\{P_1(k)\}$ являются структурированными и пусть $G_1(j)$ записаны так, что они меньше как $G_2(j)$, так и $G_1(j + 1)$. Тогда

   из M наборов простых чисел $\{P_1(i), P_2(i)\}$ пригодны для построения вспомогательных таблиц правильных магических матриц 4×4 только те наборы, для которых существует такое $S_3(l)$, что $S_3(l) = G_1(1) + G_1(4) = G_1(2) + G_1(3)$.

5. Если из M наборов простых чисел $\{P_1(k), P_2(k)\}$ в результате дальнейшей проверки осталось L наборов (см. пункт 4), то при $L > 0$ для расстановок простых чисел в клетки L вспомогательных таблиц можно воспользоваться Рис. 34(6) {представленная на Рис. 34(6) таблица получается из вспомогательной таблицы 34(1) с помощью следующих переобозначений ее параметров: $e = G_1(1)$, $d = G_1(2) - G_1(1)$, $c = S_3 - G_1(1) - G_1(2)$, $b = S_2 - S_3$, $a = S_1 - S_2$}.

Эффективность приведенного алгоритма предлагаем оценить самостоятельно {например, на наборе из 8-и пар простых чисел-близнецов, указанном в пункте (Б)}.

Г. Найдем общие алгебраические формулы $AF_1, AF_2, \ldots,$ AF_{12} магических матриц 4×4, имеющих соответственно рисунки структур 33(1 – 12).

1. Для рисунков структур 33(1 – 4) соответствующие общие структурированные алгебраические формулы $AF_1, AF_2, AF_3,$ AF_4 можно получить из матрицы A_S (см. Раздел 3.1.1) при следующих соотношениях между ее параметрами A, B, C, D, a, c, d, w

Формула	Соотношения	Формула	Соотношения
AF_1	$A+C=B+D$, $c = a + d$	AF_3	$A+D=B+C$, $c = a + d$, $w = 0$
AF_2	$A+B=C+D$, $a = c + d$, $w = 0$	AF_4	$A+D=B+C$, $a = c + d$, $w = 0$

Используя эти соотношения, легко доказать, что

α) В клетках алгебраической формулы AF_1, имеющей рисунок структуры 33(1), находятся две последовательности из 8-и элементов следующего вида

i) $a_1 + w$, $a_1 + a$, $a_1 + a + d$, $a_1 + d$, $a_1 + b$, $a_1 + a + b + w$, $a_1 + a + b + d$, $a_1 + b + d$;

ii) a_2, $a_2 + a$, $a_2 + a + d$, $a_2 + d - w$, $a_2 + b$, $a_2 + a + b$, $a_2 + a + b + d - w$, $a_2 + b + d$.

Таким образом, как и в матрице A_S (см. Раздел 3.1.1), закон, существующий между символами общей алгебраической формулы с рисунком структуры 33(1), усложнен за счет присутствия четырех элементов, содержащих символ w. Вследствие этого знание закона, существующего между элементами общей алгебраической формулы AF_1, в общем случае не может помочь в создании удобного и практичного алгоритма построения численных примеров соответствующих магических матриц;

β) Так как в общих алгебраических формулах AF_2, AF_3, AF_4, имеющих соответственно рисунки структур 33(2 – 4), параметр w равен нулю, эти формулы являются алгебраическими формулами обобщенных правильных магических матриц и, следовательно (см. пункт 1 в доказательстве Утверждения 4), с их помощью легко строить численные примеры обсуждаемых матриц.

$a_1 + b + 2c$	$a_2 + c$	$a_1 + b$	$a_2 + 2b + 3c$
$a_2 + b + 3c$	$a_1 + 2b + 2c$	$a_2 + b + c$	a_1
$a_2 + b$	$a_1 + c$	$a_2 + b + 2c$	$a_1 + 2b + 3c$
$a_1 + b + c$	$a_2 + 2b + 2c$	$a_1 + b + 3c$	a_2

(5)

a_2	$a_1 + c$	$a_1 + 2b + c + d$	$a_2 + 2b + 2c + d$
$a_1 + 2b + 2c + d$	$a_2 + b + 2c + d$	$a_2 + b$	a_1
$a_2 + 2b$	$a_1 + b$	$a_1 + b + 2c + d$	$a_2 + 2c + d$
$a_1 + 2c + d$	$a_2 + 2b + c + d$	$a_2 + c$	$a_1 + 2b$

(6)

$a_2 + b$	$a_1 + b + 2c$	$a_1 - b$	$a_2 + b + 2c$
$a_2 + 2b + 2c$	$a_1 - b + c$	$a_1 + b + c$	a_2
$a_1 - b + 2c$	$a_2 + c$	$a_2 + 2b + c$	$a_1 + b$
a_1	$a_2 + 2b$	$a_2 + 2c$	$a_1 + 2c$

(7)

a_1+2b	a_2+10b	a_1+4b	a_2+4b
$a_2 + b$	a_1+10b	a_2+8b	$a_1 + b$
a_2+9b	a_1	a_2+2b	a_1+9b
a_1+8b	a_2	a_1+6b	a_2+6b

(8)

a_1+12b	a_1+16b	$a_1 + 4b$	a_1+10b
a_1+14b	$a_1 + 7b$	a_1+21b	a_1
a_1+11b	$a_1 + 6b$	$a_1 + 8b$	a_1+17b
$a_1 + 5b$	a_1+13b	$a_1 + 9b$	a_1+15b

(11)

$a_1 + 4b$	a_1+12b	a_1+10b	a_1+16b
a_1+11b	$a_1 + 8b$	$a_1 + 6b$	a_1+17b
a_1+14b	$a_1 + 7b$	a_1+21b	a_1
a_1+13b	a_1+15b	$a_1 + 5b$	$a_1 + 9b$

(10)

a_1	a_2+8b	a_2	a_1+8b
a_2+6b	a_1+6b	a_1+2b	a_2+2b
a_1+5b	$a_2 + b$	a_2+7b	a_1+3b
a_2+5b	$a_1+ b$	a_1+7b	a_2+3b

(9)

$a_1 + 3b$	$(a_1 + a_2)/2 + 3b$	$(a_1 + a_2)/2 - b$	$a_2 + 5b$
$a_2 + 3b$	$a_2 + b$	$a_1 + 5b$	$a_1 + b$
$a_1 + 4b$	a_1	$a_2 + 4b$	$a_2 + 2b$
a_2	$(a_1 + a_2)/2 + 6b$	$(a_1 + a_2)/2 + 2b$	$a_1 + 2b$

(12)

Рис. 35. Общие алгебраические формулы магических матриц 4×4, имеющие соответственно рисунки структур 33(5 – 12).

2. Алгебраические формулы $AF_5, AF_6, \ldots, AF_{12}$, имеющие соответственно рисунки структур 33(5 – 12), представлены на Рис. 35.

Анализируя алгебраические формулы $AF_5, AF_6, \ldots, AF_{12}$, можно прийти к следующим выводам:

i) формулы AF_{10} и AF_{11} {с рисунком структур 33(10) и 33(11)} устроены самым простым способом: в каждой из этих формул содержится

арифметическая прогрессия, содержащая 14 членов;

ii) наборы символов, которые содержатся в каждой из формул $AF_5, AF_6, \ldots, AF_9$, можно представить

в виде двух одинаковым образом устроенных последовательностей из 8-*и элементов*

{предлагаем самостоятельно убедиться, что это справедливо и для алгебраических формул AF_2, AF_3, AF_4, имеющих соответственно рисунки структур 33(2 – 4)};

iii) в формуле AF_{12} содержатся

две арифметические прогрессии, содержащие по 6 *членов каждая и имеющие одинаковую разность прогрессии*

{таким образом, усложнению закона, которому подчиняются составляющие ее символы, алгебраическая формула AF_{12} обязана всего четырем своим элементам}.

Основной вывод, который можно сделать из проведенного анализа:

Для построения примеров магических матриц, обладающих рисунками структур 33(2 – 12), *удобно использовать соответствующие этим рисункам структур общие алгебраические формулы магических матриц* 4×4.

Добавим, что

а) наименьшие магические матрицы 4×4, имеющие рисунки структур 33(1 – 12), приведены на Рис. 36;

1	14	15	4
11	8	5	10
6	9	12	7
16	3	2	13

(1)

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

(2)

1	4	14	1
13	16	2	3
12	9	7	6
8	5	11	10

(3)

1	4	14	15
16	13	3	2
11	10	8	5
6	7	9	12

(4)

10	3	6	15
11	14	7	2
5	4	9	16
8	13	12	1

(5)

1	4	15	14
16	10	5	3
9	7	12	6
8	13	2	11

(6)

15	1	9	13
10	8	2	18
7	17	11	3
6	12	16	4

(7)

20	1	18	7
10	12	3	21
2	22	9	13
14	11	16	5

(8)

10	9	1	18
7	16	12	3
15	2	8	13
6	11	17	4

(9)

5	13	11	17
12	9	7	18
15	8	22	1
14	16	6	10

(10)

13	17	5	11
15	8	22	1
12	7	9	18
6	14	10	16

(11)

17	10	14	1
3	5	15	19
16	20	2	4
6	7	11	18

(12)

Рис. 36. Примеры наименьших магических матриц 4×4, обладающих рисунками структур 33(1 – 12).

б) наименьшие магические матрицы 4×4 из простых чисел, имеющие рисунки структур 33(1 – 9, 12), приведены в Разделе 3.3.2;

в) алгебраическую формулу AF_9, имеющую рисунок структуры 33(9), можно представить в виде суммы трех нерегулярных N-компонент, одной A-компоненты и тривиальной матрицы T (см. Рис. 37), умноженных на соответствующие параметры формулы AF_9 {сравните с формулой обобщенной правильной магической матрицы 4×4, которая приведена в Разделе 3.1.5}:

$$AF_9 = bN_1 - 2bN_2 + 5bN_3 + (a_1 - a_2)A + (a_1 + 2b)T$$

{Полное решение задачи о разложении магических матриц 4×4 на сумму 4-х компонент и тривиальной матрицы *eT* будет приведено нами во втором выпуске данных лекций.}.

n	*q*	*n*	*q*
q	*q*	*n*	*n*
n	*q*	*n*	*q*
n	*q*	*n*	*q*

(1) – N_1

n	*q*	*n*	*q*
n	*n*	*q*	*q*
n	*n*	*q*	*q*
n	*n*	*q*	*q*

(2) – N_2

n	*q*	*n*	*q*
q	*q*	*n*	*n*
q	*n*	*q*	*n*
q	*n*	*q*	*n*

(3) – N_3

a	*p*	*p*	*a*
p	*a*	*a*	*p*
a	*p*	*p*	*a*
p	*a*	*a*	*p*

(4) – *A*

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

(5) – *T*

Рис. 37. Список *N*-, *A*-, *T*-компонент, на которые разложима алгебраическая формула AF_9.

3.2. Магические матрицы *n*×*n* (*n* > 4) из простых чисел

3.2.1. Общий вид магической матрицы n×n и ее свойства

Построить ***общую алгебраическую формулу*** магической матрицы заданного порядка *n* > 4 можно тем же способом, как это было сделано для *n* = 3, 4 в Разделах 2.6.1 и 3.1.1.

Действительно, используя условие магичности матрицы $A_{n\times n} = \{a_{ik}\}$, можно выписать $2n+2$ уравнений: *n* для сумм *a*-символов в строках, еще *n* для сумм *a*-символов в столбцах и два для сумм *a*-символов в главных диагоналях (все указанные суммы одинаковы и равны *S*).