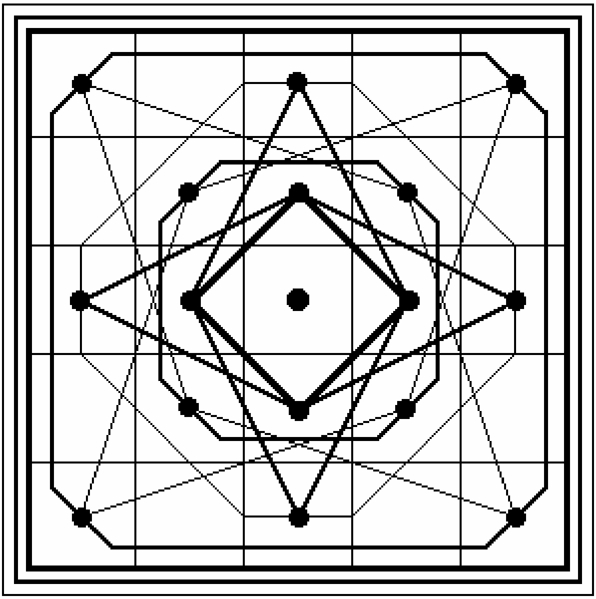
Лекции по Математике. Вып. ТММ-1

Ю. В. Чебраков

ТЕОРИЯ МАГИЧЕСКИХ МАТРИЦ



Санкт-Петербург, 2010

УДК 511+512
ББК 22
Ч345

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук,
профессор С.-Петерб. техн. ун-та
М. А. Салль
Кандидат физико-математических наук,
доцент ин-та истории естествознания и техники РАН
Л. И. Брылевская

Чебраков Ю. В.

Ч345 Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во «ВВМ», 2010. – 280 с. – (Лекции по Математике. Вып. ТММ-1.)

ISBN 978–5–9651–0357–7

Данная книга является *первым выпуском* курса лекций, посвященных изложению современного варианта *теории магических матриц* (ТММ). В ней излагаются развитый автором функционально-алгебраический подход к решению различных комбинаторных задач о классических и нетрадиционных магических матрицах (в частности, о классических и нетрадиционных магических квадратах) и основные понятия и методы теории чисел, комбинаторного анализа, теории линейных уравнений и теории матриц, которые наиболее активно используются в ТММ.

Текст лекций написан простым понятным языком, содержит не только теоретический материал, но и описание разнообразных вычислительных алгоритмов и математических методов решения задач.

Книга рассчитана на широкий круг читателей: от студентов вузов и университетов до преподавателей и научных сотрудников.

УДК 511+512
ББК 22

ISBN 978–5–9651–0357–7

ной правильной магической матрицы 4×4, которая приведена в Разделе 3.1.5}:

$$AF_9 = bN_1 - 2bN_2 + 5bN_3 + (a_1 - a_2)A + (a_1 + 2b)T$$

{Полное решение задачи о разложении магических матриц 4×4 на сумму 4-х компонент и тривиальной матрицы eT будет приведено нами во втором выпуске данных лекций.}.

n	q	n	q
q	q	n	n
n	q	n	q
n	q	n	q

(1) – N_1

n	q	n	q
n	n	q	q
n	n	q	q
n	n	q	q

(2) – N_2

n	q	n	q
q	q	n	n
q	n	q	n
q	n	q	n

(3) – N_3

a	p	p	a
p	a	a	p
a	p	p	a
p	a	a	p

(4) – A

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

(5) – T

Рис. 37. Список N-, A-, T-компонент, на которые разложима алгебраическая формула AF_9.

3.2. Магические матрицы n×n (n > 4) из простых чисел

3.2.1. Общий вид магической матрицы n×n и ее свойства

Построить ***общую алгебраическую формулу*** магической матрицы заданного порядка $n > 4$ можно тем же способом, как это было сделано для $n = 3,\ 4$ в Разделах 2.6.1 и 3.1.1.

Действительно, используя условие магичности матрицы $A_{n\times n} = \{a_{ik}\}$, можно выписать $2n+2$ уравнений: n для сумм a-символов в строках, еще n для сумм a-символов в столбцах и два для сумм a-символов в главных диагоналях (все указанные суммы одинаковы и равны S).

Из 2n уравнений для сумм a-символов в строках и столбцах матрицы $A_{n\times n}$ можно вычеркнуть любое одно

{это связано с тем, что вычеркнутое уравнение можно получить из оставшихся $2n - 1$ уравнений}.

Таким образом,

при любом n для определения n^2+1 неизвестных общей алгебраической формулы магической матрицы $n\times n$ имеется $2n + 1$ уравнений.

Будем считать, что для любого $n \geq 3$ система из оставшихся $2n + 1$ уравнений приводится методом Гаусса к системе из $2n - j + 1$ уравнений. В этом случае матрица B коэффициентов системы из $2n + 1$ уравнений приводится к матрице B^* трапециевидной формы, ранг r которой равен $2n - j + 1$. При этом в окончательном решении обсуждаемой системы будут находиться $n^2 + 1 - r = n^2 + 1 - (2n - j + 1) = n^2 - 2n + j$ произвольно задаваемых параметров и $2n - j + 1$ переменных, значения которых определяются через некоторые линейные комбинации указанных параметров (см. Разделы 2.3.2, 2.4.4 и 2.6.1). Отметим также, что, если для определения значений S использовать какое-либо одно из $2n - j + 1$ уравнений обсуждаемой системы, то переменная S не будет входить в набор произвольно задаваемых параметров окончательного решения и в этом случае все $n^2 - 2n + j$ произвольно задаваемых параметров и $2n - j$ переменных, значения которых определяются через некоторые линейные комбинации указанных параметров, будут являться a-символами матрицы $A_{n\times n}$.

Утверждение 1. *Общая алгебраическая формула магической матрицы $n\times n$ содержит $n^2 - 2n$ параметров и соответственно 2n символов, определяемых через эти параметры.*

Доказательство.

С учетом изложенного ранее требуется доказать, что

для любого $n \geq 3$ $j = 0$.

Докажем, что это верно, например, для всех n от трех до пяти.

а) Для общих алгебраических формул магических матриц 3×3 и 4×4 количество произвольно задаваемых параметров равно соответственно 3 и 8 (см. Разделы 2.6.1 и 3.1.1), то есть при n = 3, 4 количество произвольно задаваемых параметров можно подсчитать по формуле $n^2 - 2n$ и, следовательно, для этих случаев j = 0.

б) Пусть $n = 5$ и задана символьная матрица $A_{5\times5} = \{a_{ik}\}$ {см. Рис. 38(1)}.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

(1)

x_7	x_6	x_{10}	x_5	x_3
x_8	a_{22}	x_9	a_{24}	x_4
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	x_2
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	x_1
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}

(2)

Рис. 38. Построение общей алгебраической формулы магической матрицы 5×5.

При j = 0 для построения из матрицы $A_{5\times5}$ общей алгебраической формулы магической матрицы 5×5 пятнадцать a-символов необходимо выбрать произвольно, а оставшиеся десять a-символов будут некоторыми линейными комбинациями произвольных параметров. Будем считать, что зависимыми являются следующие a-символы матрицы $A_{5\times5}$:

а) все пять, находящиеся в ее первой строке;

б) три, находящиеся во второй, третьей и четвертой строках крайнего справа столбца;

в) один, находящийся во второй строке первого слева столбца;

г) один, находящийся во второй строке третьего слева столбца {см. Рис. 38(2), на котором все зависимые a-символы переименованы в x-символы с присвоением им соответствующего порядкового номера).

Покажем, что

при указанной расстановке x-*символов из матрицы* 38(2) *можно получить общую алгебраическую формулу магической матрицы* 5×5.

Введем обозначения:

R_i — сумма a-символов, находящихся в i-ой строке матрицы 38(2);

C_i — сумма a-символов, находящихся в i-ом столбце;

D_1 и D_2 — сумма a-символов, находящихся соответственно в восходящей и нисходящей главных диагоналях.

Из условия магичности матрицы 38(2) с учетом введенных обозначений получим для x-символов следующие выражения:

$$x_1 = R_5 - R_4; \quad x_6 = R_5 - C_2; \qquad x_2 = R_5 - R_3; \quad x_7 = R_5 - D_2;$$

$$x_3 = R_5 - D_1; \quad x_8 = R_5 - C_1 - x_7; \quad x_4 = R_5 - C_5 - (x_1 + x_2 + x_3);$$

$$x_9 = R_5 - R_2 - x_4 - x_8; \qquad x_5 = R_5 - C_4; \qquad x_{10} = R_5 - C_3 - x_9.$$

Отметим, что, подставив найденные выражения для x-символов в таблицу 38(2), получим символьную матрицу, в которой условие магичности выполнено для

– всех столбцов (из условия магичности столбцов определены выражения для символов x_8, x_6, x_{10}, x_5, x_4);
– обеих главных диагоналей (из условия их магичности определены выражения для символов x_3, x_7);
– всех строк кроме первой (из условия магичности соответственно второй, третьей и четвертой строк определены выражения для символов x_9, x_2, x_1; пятая строка является магической, так как состоит из одних a-символов).

Проверим, выполняется ли условие магичности для первой строки матрицы 38(2). Для этого избавимся от x-символов в полученных выражениях для x_4, x_8, x_9, x_{10}:

$$x_4 = R_5 - C_5 - (x_1 + x_2 + x_3) = R_5 - C_5 - R_5 + R_4 - R_5 + \\ + R_3 - R_5 + D_1 = D_1 - C_5 + R_4 + R_3 - 3R_5;$$

$$x_8 = R_5 - C_1 - x_7 = R_5 - C_1 - R_5 + D_2 = D_2 - C_1;$$

$$x_9 = R_5 - R_2 - x_4 - x_8 = R_5 - R_2 - D_1 + C_5 - R_4 - R_3 + \\ +3R_5 - D_2 + C_1 = 4R_5 + C_1 + C_5 - D_1 - D_2 - R_4 - R_3 - R_2;$$

$$x_{10} = R_5 - C_3 - x_9 = R_5 - C_3 - 4R_5 - C_1 - C_5 + D_1 + D_2 + \\ + R_4 + R_3 + R_2 = D_1 + D_2 - C_1 - C_3 - C_5 - 3R_5 + R_4 + R_3 + R_2.$$

Подсчитаем теперь, чему равна сумма x-символов первой строки таблицы 38(2):

$$x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_{10} = (R_5 - D_1) + (R_5 - C_4) + (R_5 - C_2) + (R_5 - D_2) + (D_1 + D_2 - C_1 - C_3 - C_5 - 3R_5 + R_4 + R_3 + R_2) =$$

$$= R_5 + (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - (C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5) = R_5.$$

Последнее верно, так как

$$R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 = S_a,$$

где S_a — сумма всех a-символов матрицы 38(2).

Обратим внимание, что

в рассмотренном доказательстве приведено правило расстановки x-символов в матрице 5×5, *которое легко обобщается на случай произвольного* $n > 5$.

Таким образом,

для любого $n > 4$ *имеется возможность строить общие алгебраические формулы магических матриц* $n \times n$ *без решения исходной системы из* $2n + 1$ *уравнений*.

Из Утверждения 1 получаем, что при $n > 4$ количество параметров общей формулы магической матрицы $n \times n$ превышает количество символов, определяемых через эти параметры. По этой причине с ростом n происходит усложнение закона, существующего между символами общей формулы магической матрицы $n \times n$, и, следовательно, при $n \geq 4$ использование общих формул для решения задач о построении магических матриц $n \times n$ из простых чисел становится малоэффективным.

Далее обсудим, можно ли для построения магических матриц $n \times n$ ($n > 4$) из простых чисел использовать методы, изложенные в Разделе 3.1.

3.2.2. Алгоритм построения магических матриц из заданного набора $n \times n$ простых чисел

Напомним, что в Разделе 3.1.2 рассмотрен общий алгоритм решения задачи о построении магических матриц 4×4 из заданного набора 16-и простых чисел. Очевидно, что этот алгоритм легко модифицировать так, чтобы он стал пригоден для построения магических матриц $n \times n$ ($n > 4$) из заданного набора $n \times n$ простых чисел. Однако при $n > 6$ модифицированный алгоритм становится практически бесполезным из-за того, что невозможно достичь окончательного результата за практически приемлемое время. Для иллюстрации приведем

а) результаты, которые получаются на первых двух шагах работы обсуждаемого алгоритма, если с его помощью решается задача о построении множества всех классических матриц $n\times n$ для $n = 3, 4,\ldots,8$ $\{S_n = n(n^2+1)/2$ — магическая постоянная классической матрицы $n\times n$, R_n — количество разбиений числа S_n на n различных слагаемых, каждое из которых принадлежит набору чисел $1,2,\ldots,n^2$ (см. Раздел 1.1.7) };

б) известные к настоящему времени значения A_n, где A_n — количество классических матриц $n\times n$, подсчитанное с точностью до поворотов, отражений и М-преобразований (см. Раздел 3.1.2):

n	3	4	5	6	7	8
S_n	15	34	65	111	175	260
R_n	8	86	1 394	32 134	957 332	35 154 340
A_n	1	220	68 826 306	–	–	–

Отметим, что значение A_5 с помощью ЭВМ определили в 1973 г. Р. Шрёппель и М. Билер {сообщение об этом опубликовано, например, в (*Gardner M.* Time travel and other mathematical bewilderments. New York, 1988.)}.

3.2.3. Методы построения алгебраических формул магических матриц n×n из сумм классических и символьных матриц

Напомним, что в настоящее время существуют достаточно хорошо разработанные методы построения классических матриц $n\times n$ (см. Раздел 2.2) и диагональных латинских матриц (см. Раздел 2.2.3 и публикации {*Назарок А.В.* Пары ортогональных дважды диагональных латинских квадратов порядков 15, 18 и 26 // Комбинаторный анализ. Вып.32. М.: МГУ, 1989.; *Denes, J. and Keedwell, A.D.* Latin squares and their application. Budapest: Academiai Kiado, 1974; *Heinrich K. and Hilton A.J.W.* Doubly diagonal orthogonal latin squares // Discrete Math. Vol.46. № 2. 1983.}). По этой причине для построения магических матриц $n \times n$ ($n > 4$) из простых чисел пригодны методы, изложенные Разделе 3.1.4.

Для иллюстрации продемонстрируем, как можно построить из простых чисел магическую матрицу 6×6, используя диагональную латинскую и классическую матрицы 6-го порядка, приведенные соответственно на Рис. 39(1, 2) {классическая матрица 39(2) построена с помощью аналитической формулы, указанной в пункте (А) Раздела 2.2.5}.

Уменьшим числа классической матрицы 39(2) на единицу. Затем умножим числа получившейся новой таблицы на символ b и, наконец, сложим (поклеточно) b-символьную магическую матрицу с диагональной латинской матрицей 39(1). В результате получим алгебраическую формулу магической матрицы 6×6, которая в виде символьной вспомогательной таблицы приведена на Рис. 39(3). Для получения окончательного результата осталось заполнить вспомогательную таблицу 39(3) простыми числами и затем с помощью классической матрицы 39(2) осуществить переход от этой таблицы к искомой магической матрицы 6×6 .

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_5	a_3	a_6	a_1	a_4	a_2
a_4	a_1	a_5	a_2	a_6	a_3
a_2	a_4	a_1	a_6	a_3	a_5
a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_3	a_6	a_2	a_5	a_1	a_4

(1)

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

(2)

a_1	$a_1 + 7b$	$a_1 + 9b$	$a_1 + 12b$	$a_1 + 24b$	$a_1 + 26b$
a_2	$a_2 + 7b$	$a_2 + 13b$	$a_2 + 21b$	$a_2 + 24b$	$a_2 + 28b$
a_3	$a_3 + 2b$	$a_3 + 6b$	$a_3 + 8b$	$a_3 + 16b$	$a_3 + 28b$
a_4	$a_4 + 12b$	$a_4 + 15b$	$a_4 + 17b$	$a_4 + 20b$	$a_4 + 23b$
a_5	$a_5 + b$	$a_5 + 3b$	$a_5 + 11b$	$a_5 + 13b$	$a_5 + 17b$
a_6	$a_6 + 10b$	$a_6 + 14b$	$a_6 + 20b$	$a_6 + 23b$	$a_6 + 29b$

(3)

Рис. 39. Построение из простых чисел магической матрицы 6×6.

Шесть последовательностей из шести простых чисел, подчиняющихся указанным в таблице 39(3) закономерностям, можно получить, положив, например, в этой таблице

$$b = 6,\ a_1 = 347,\ a_2 = 5,\ a_3 = 761,\ a_4 = 571,\ a_5 = 331,\ a_6 = 19.$$

3.3. Наименьшие магические матрицы из простых чисел

3.3.1. Наименьшие матрицы 3×3 из простых чисел

В согласии с публикацией (*Andrews W.S. and Sayles H.A.* Magic squares made with prime numbers to have the lowest possible summations / The Monist, **23** (4). 1913), Дьюдени (H. Dudeney) еще в 1900 г. построил из простых чисел ***наименьшую*** магическую матрицу 3×3, которая приведена на Рис. 16(1) в Разделе 2.6.4.

Первый алгоритм для построения из простых чисел магических матриц 3×3 предложен в публикации (*Гуревич Е.Я.* // Наука и жизнь. № 9. 1972). В принципе с помощью этого алгоритма возможно построить все те наименьшие магические матрицы 3×3 из простых чисел, которые приведены на Рис. 16 в Разделе 2.6.4. Однако о недостаточной эффективности алгоритма Е.Я. Гуревича свидетельствует тот факт, что в выводах указанной публикации

а) ставится под сомнение возможность построения из простых чисел таких магических матриц 3×3, для которых алгебраическая формула $A_S(a,b,c)$ {см. Раздел 2.6.1} имеет вид $A_S(17,b,c)$;

б) утверждается, что из алгебраической формулы $A_S(17,b,c)$ нельзя получить магической матрицы 3×3 из простых чисел, когда $b \leq 180$ и $c \leq 114$.

Легко доказать, что положения (а) и (б) ошибочны.

Действительно

i) ошибочность положения (а) доказывает магическая матрица 3×3, которая находится в левом верхнем углу магической матрицы 9×9, представленной на Рис. 17(1) {см. Раздел 2.6.4};